



TITLE:

溶融・凝固を含む相変態の熱・力学的表現と溶接過程のシミュレーションに関する研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

佐久間, 淳

CITATION:

佐久間, 淳. 溶融・凝固を含む相変態の熱・力学的表現と溶接過程のシミュレーションに関する研究. 京都大学, 1996, 博士(工学)

ISSUE DATE:

1996-05-23

URL:

<https://doi.org/10.11501/3112277>

RIGHT:

許諾条件により本文は2011-04-01に公開

②

溶融・凝固を含む相変態の熱・力学的表現と
溶接過程のシミュレーションに関する研究

1996 年 3 月

佐久間 淳

序 文

材料の評価を力学的に行おうとする試みに対して、近年の計算機の発達を背景として、複雑な力学的現象についての数値シミュレーションが盛んとなっている。これによって、それまで解析が困難であった材料挙動に対する研究も進み、多くの工学的諸問題を現実の過程に近い条件で解析することが可能となってきた。そのような状況の中においても、この力学問題に熱と組織が関連している過程は依然として難問であって、その過程の解析方法の確立のために現在も多くの努力がなされている。

本論文は、工学的問題を現実にもっとも近い形で評価することを目的として、熱と組織の影響を考慮した力学問題の解析手法に考察を加えた結果をまとめたものである。具体的な工学的問題としては溶接を取り上げたが、これは人類の文明形成期から存在する加工方法であるにも関わらず、溶融・凝固などの相変態の問題の複雑さのために力学的な評価は難しく、しかも依然として未知の部分が多い主題である。本論文においては、溶接を考察の対象にすることによって、温故知新の言葉を借りるまでもなく、幾つかの現象について無知無才な筆者なりに新たな考察を行うことができたように感じている。本冊子はそれらの考察をまとめたものであるが、内容について検討が不十分と思われる点については、諸賢のご教授をいただければ望外の喜びである。

目次

1 緒論	1
1.1 工学における材料の熱・力学的挙動の解析	1
1.2 熱・力学への発展過程	2
1.2.1 材料に関する力学の発展	2
1.2.2 熱・力学的考察への発展	2
1.3 溶接における材料挙動の解析と本論文の目的	4
1.3.1 溶接問題の解析の試み	4
1.3.2 本論文の目的と構成	7
2 解析の基礎式	11
2.1 緒言	11
2.2 変化の表現	12
2.2.1 座標系, ひずみと速度	12
2.2.2 変化率による表現	15
2.2.3 局所平衡と局所状態	16
2.2.4 質量保存則	17
2.2.5 運動量保存則	17
2.2.6 エネルギー保存則	18
2.3 物質点と境界の速度が異なる問題	19
2.3.1 境界の移動と保存則	19
2.3.2 各保存則から得られる関係	20
2.4 内部境界が移動する問題	21

2.4.1	内部境界を考慮した変化率	21
2.4.2	諸量の保存則に関する考察	23
2.5	内部および外部境界が移動する問題	26
2.5.1	全境界の移動を考慮した変化率	26
2.5.2	諸量の変化率に関する考察	27
2.6	結言	29
3	構成式と有限要素法の定式化	31
3.1	緒言	31
3.2	材料と構成式	32
3.2.1	変形挙動と力学的構成式	32
3.2.2	溶接過程の材料挙動と構成式	33
3.3	粘塑性構成式と有限要素法の定式化	35
3.3.1	Perzyna 形粘塑性モデル	35
3.3.2	相変態を考慮した熱弾粘塑性構成式	37
3.3.3	有限要素法の基礎理論	38
3.3.4	弾粘塑性構成式を用いた定式化	41
3.3.5	剛粘塑性構成式を用いた定式化	44
3.3.6	有限要素法による連成解析	48
3.4	境界の移動に関する考察	49
3.4.1	境界の移動と静的つり合い状態	50
3.4.2	内部境界に関する考察	50
3.4.3	溶融・凝固過程の有限要素式	52
3.4.4	外部からの物質供給を考慮した定式化	55
3.5	結言	57

4	溶接過程における相変態	59
4.1	緒言	59
4.2	溶接と相変態	60
4.2.1	溶融・凝固	60
4.2.2	固相内の組織変化の影響	61
4.3	加熱冷却連続過程の拡散変態速度式	63
4.3.1	変態駆動力	63
4.3.2	核生成条件	64
4.3.3	核生成への応力の影響	66
4.3.4	結晶粒成長速度	68
4.3.5	変態の速度式	68
4.3.6	母相粒子の縮退および消滅	70
4.3.7	変態曲線の算出	71
4.4	結言	77
5	加熱・冷却過程の拡散変態を考慮した炭素鋼の溶接過程の解析	79
5.1	緒言	79
5.2	解析の基礎理論	80
5.2.1	温度解析	81
5.2.2	組織解析	82
5.2.3	応力/ひずみ解析	82
5.3	計算と考察	84
5.3.1	溶接モデルと解析条件	84
5.3.2	計算結果と考察	84
5.4	結言	94

6	熱影響部の組織変化を考慮した SUS304 鋼の溶接過程の解析	95
6.1	緒言	95
6.2	溶接熱影響部の組織変化	96
6.2.1	供試材の組織観察	96
6.2.2	溶接部周辺の組織	98
6.3	解析基礎理論	100
6.3.1	組織解析	100
6.3.2	温度解析	101
6.3.3	応力/ひずみ解析	102
6.4	計算と考察	104
6.4.1	溶接モデルと解析条件	104
6.4.2	解析結果と考察	105
6.5	結言	114
7	溶接過程のシミュレーションへの固相-液相の連成解析の適用	115
7.1	緒言	115
7.2	数値解析理論	116
7.2.1	解析の基本的な流れ	116
7.2.2	温度と相変態の解析	117
7.2.3	応力/ひずみ解析	117
7.3	溶接過程の解析への適用	120
7.3.1	解析モデル	120
7.3.2	計算結果と考察	120
7.4	結言	131
8	溶着金属の成長を考慮した溶接過程の固相-液相の連成解析	133
8.1	緒言	133
8.2	数値解析理論	134
8.2.1	解析の流れ	134
8.2.2	温度と相変態の解析	137

8.2.3	応力/ひずみ解析	137
8.3	計算と考察	138
8.3.1	溶接モデルと計算条件	138
8.3.2	計算結果と考察	140
8.4	結言	149
9	結論	151
9.1	材料の熱・力学的挙動と溶接	151
9.1.1	材料の相変態過程の熱・力学的解析	151
9.1.2	相変態と溶接	154
9.2	展望	156
	参考文献	157
	関連発表論文	173
	謝辞	177

第1章

緒論

1.1 工学における材料の熱・力学的挙動の解析

今日、計算機の発達と製品開発期間短縮の必要性の増大という条件の下、多くの工学分野において計算機の有効的な利用方法が模索されている。その中に、工学における種々の現象の解析および評価について、計算機を用いた数値シミュレーションによってこれらを行い、直面する問題の効果的な解決あるいは各種条件の最適化が試みられている。とくに、製品を設計、製造する過程で重要となる機能評価あるいは強度的な評価を行う際には、力学的、材料学的な因子の考慮が不可欠である。しかも、実際の工学過程ではこれら力学的、材料学的な変化が同時に生じるばかりではなく、さらに熱的な現象も伴うことが多いものである。したがって、このような過程の評価を現実の現象にもとづいて論じるためには、力と熱、材料に関する諸現象を表現し得る方法を用いて行う必要がある。

ここで、歴史的に概観すると、現在のような計算機が発達した時代に至る以前の段階においては、これら複数の現象を同時に解析することは極めて困難であった。したがって、これらの解析法は学問的、理論的に独立した形態をとって発展してきたが、例えば材料力学に熱力学の理論を適用する試みなどを基本として、得られた現象に対する複数の関係式を計算機によって同時に解析することが現在可能となっている。しかし、その中にある個々の現象について観察を行う場合には、当然それらは現在まで確立された条件や法則などを満足していなければならない。したがって、新たな工学過程の評価方法を検討する場合には、これらの法則やその背景にある条件を十分に踏まえることが要求される。そこで、ここでは材料の熱・力学的な論理の展開を行うにあたって、まず本論文に関係のある学術分

野の研究の発展過程を簡単に示した後、主題となっている溶接の解析の現在までの流れを示すこととする。そして、この分野で現在発展が待たれている項目を示した上で、本論文の目的と構成を示すこととする。

1.2 熱・力学への発展過程

1.2.1 材料に関する力学の発展

歴史的にみると、材料挙動に関する研究は構造物と共に発展しており、その歴史は長くさまざまな条件、材料に対する考えが多数提案されてきている。これらを概観した Timoshenko の材料力学の発展の歴史に関する著書 [1] によると、da Vinci や D.G. Galilei に始まり R. Hooke や E. Mariotte らによる草創期、the Bernoulli, L. Euler や J.L. Lagrange らまでの弾性曲線に関する研究、C.A. Coulomb, G. Monge, H. Navier, J.V. Poncelet, T. Young らの研究を経て A. Cauchy, S.D. Poisson, M.V. Ostgradsky, G. Lamé, B.P.E. Clapeyron などによる数理弾性論へと到り、これはさらに G.G. Stokes, Saint-Venant, J.M.C. Duhamel, F. Neumann, G.R. Kirchhoff, Lord Kelvin, J.C. Maxwell らの手を経て発展する。この頃、材料強度と関係して J. Bauschinger, O. Mohr, A. Castigliano らが新たな考察を示すと共に、安定問題では F.S. Jasinsky, F. Engesser, また試験法で A. Föppl の業績が挙げられる。その後の代表的な弾性論としては J.V. Boussinesq, Lord Rayleigh, H. Lamb, A.E.H. Love, W. Voigt, H.R. Hertz, 20 世紀に入ると F. Klein, L. Prandtl らの研究が挙げられ、この頃に脆性や延性に関する強度論やクリープに関する研究も始められている。一方、Laue の理論と実験を基礎した Bragg や Debye の X 線回折法による結晶構造解析によって、金属の構造と材料力学の関連も注目されるようになる。またこれによって、Lord Kelvin が示していた引張試験の熱力学的説明が内部構造の変化と共に論じられるようになり、こうして材料の熱・力学的挙動を論じる基礎が形成された。

1.2.2 熱・力学的考察への発展

熱と材料力学の関連が着目され始めると、工学的な要請からまず熱応力の影響が考慮されるようになった。まず、E. Melan ら、あるいは竹内による熱弾性論 [2, 3] や Y.C. Fung の熱弾塑性論 [4] などをもとに、温度の影響を構成式 (constitutive equation) に積極的に導

入することで、温度変化を伴う材料挙動の定式化が試みられる。熱の影響を考慮した非弾性挙動の研究としては、平・井上・高橋・吉田の高温での実験から Mises 形相当塑性ひずみによる塑性疲れの推定方法 [5, 6] や田中・石崎・井上による降伏曲面の温度依存性についての検討 [7]、井上・長岐・河手による温度変化による非弾性変形の評価 [8] など、温度と材料の非弾性挙動の関連が着目されていた。

一方、これら温度変化を伴う過程の力学的材料挙動を調べる方法として、Zienkiewicz らによって有限要素法の熱伝導、熱応力の解析手法 [9] が示され、上田・山川が弾性定数と降伏点の温度依存性を考慮した有限要素解析を行った [10]。さらに、井上・田中・青木は変形の履歴を考慮した熱弾塑性解析法 [11] を示すと共に、石崎・岡部・田中・井上の降伏曲面への時間の影響も加味した研究 [12] や田中・長岐・寺浦・井上が高温におけるラチェット現象に対する降伏関数を与え [13]、材料の非弾性挙動に数値解析による解法が適用される基礎が形成されてくる。また、これら複雑な現象を巨視的な解析手法に取込む方法である内部変数論については B.D. Coleman らの複数の報告 [14]-[17] があり、これによって高温での材料挙動の性質が長岐・井上によって論じられた [18]。

ここで、さらに岸野・長岐・井上は組織の体積分率を内部変数とする構成式を提案し [19]、熱による材料の力学的挙動の相違とその表示方法に関する研究が進展した。材料の力学的な解析において温度ばかりではなく組織変化も考慮できる可能性が出てくると、それに伴う複雑な材料挙動に対する構成式の導出が試みられ始める。材料におよぼす熱と組織の影響で代表的である焼入れ過程の解析では、井上・田中が線膨張係数を冷却速度の関数として定式化を行っていた [23] のを手始めに、橋本・井上・山田が連続冷却変態曲線から組織を判断することによって残留応力と変形の解析を行い [24]、岸野・長岐・井上が組織と体積分率を内部変数とする弾塑性構成式と W.A. Johnson と R.F. Mehl の提案した拡散形変態速度式 [25] と C.L. Magee のせん断形変態速度式 [26] によって解析し [19]、さらに山口・王・井上は炭素濃度依存性を考慮した歯車の浸炭焼入れの解析を行っている [27]。とくに、井上は材料の組織による機械的性質の違いに着目し、温度と応力、組織の相互作用を考慮して非線形材料挙動を記述する連成効果の概念をまとめた [20]。このように、複雑な熱・力学的材料挙動を説明するための理論的考察は発展したが、それは同時に実際の複雑な現象と結果を個々の現象にもとづいて解析する手段として応用され、種々の熱、組織変化を伴う工学過程を現象論的に探求する手助けとなってきた。熱処理による応力緩和については、熱弾塑性ク

リープ解析による計算が行われるが [21], さらに相変態についても F.G. Rammerstorfer らによってこれが考慮された計算が行われた [22]. 同様の解析としては, R.E. Smelser らが相変態による体積変化の3分の1を熱ひずみとして考慮した例 [28] がある. 微視的な状態と巨視的な状態との関連から熱的な考察に関しては, 解析法の定式化に欠くことのできない熱力学的法則に関連したものとして, 局所的な状態を考慮した Clausius-Duhem の不等式などに関連した報告 [29]-[33] がある. この様な力学的な論議と並行して, 鑄造過程の解析 [34]-[38], 材料設計 [39, 40] や材料の熱・力学的評価 [41]-[43] などが行われ, さらにこれらの研究報告と同様に, 材料に対する熱と組織の影響が大きい溶接の問題についても, 次節に示すように多くの研究がなされていた.

1.3 溶接における材料挙動の解析と本論文の目的

溶接は歴史ある加工技術であり, その重要性は現在も変わらないばかりか日々増していくものであって, 新たな製品や材料と共にこの技術も進歩を迫られている. 同時に, これを材料挙動に関する非線形力学問題と考えた場合には, 単一系内に応力, 温度, 組織の各履歴が極端に異なる部分が同時に存在する難題であるばかりでなく, さらに技術の進歩と共に新たな問題も発生していく性質のものである. しかも, この問題の最終的な状態を解析によって推定することは, 溶接過程で生じる種々の現象が内包する非線形性によって, 根本的に大変難解な問題であることは言うまでもない. そのため, この主題は長い間研究者, 技術者を非常に悩まし, 同時に溶接工学 [44]-[48] という独特の学術体系を形成してきたが, 現在の計算機の発達に伴って, この溶接問題は熱・力学的解析手法を適用する格好の主題となっている. そこでここでは, 本論文で溶接問題について論議するにあたり, 現在までの溶接の解析, 特に数値シミュレーションに関する研究の歩みについて概観することとする.

1.3.1 溶接問題の解析の試み

溶接過程の解析については, まず D. Rosenthal が移動熱源による温度分布を準静的な状態ではあるが数学的に示している [49, 50]. このような解析的研究が長年試みられる中で, 1970 年代にはいると計算機の発達と共に溶接問題の計算機による数値解析が始められる.

この溶接問題の応力/ひずみ解析については, 上田・山川が残留応力について熱弾塑性解析 [10] を行ったのに続き, 上田・福田が応力除去焼き焼きなまし問題を熱弾塑性クリープ解

析によって行った [21]. さらに彼らは, 固有ひずみを用いた解析手法の研究に取り組んでいる [51]. また, G.W. Krutz らは熱伝導解析とともに組織の変化を考慮する方法を示すとともに溶融池と熱影響部の分布を推定し [52], さらに B.A.B. Andersson は相変態の影響について変数を温度の関数とすることで考慮した解析を行った [54]. V.J. Papazoglou らは CCT 曲線から変態量を温度の関数として考慮する方法を示し [53]. J.H. Argyris らは超過応力理論にもとづく粘塑性構成式を用いながら固相内の相変態も考慮した応力/ひずみ解析の方法を示した [55]. 王・井上は相変態として変態の速度式を用いる方法によって炭素鋼の溶接過程の材料挙動の表現を試みている [56, 57]. E. Friedman は平面応力モデルで残留応力分布の最大値が存在する位置を計算し [58]. また溶融池形状の最適化に計算を用いることを試みている [59]. L. Karlsson は熱弾塑性クリープ構成関係を溶接の応力/ひずみ解析に適用する方法を詳細にまとめ [60]. M. Jonsson らは突合せ溶接過程の変形について実験と解析から論じている [61, 62]. また R. Sandström らは, 多軸クリープの影響の考慮方法について報告している [63]. E.F. Rybicki らは移動熱源による2層盛の解析を試み [64]. さらに多層盛についても数層ごとに計算を繰返すことで計算した [65]. さらに彼らは, 溶接残留応力を局所的な誘導加熱によって軽減する方法について実験と解析から論じ [66]. 鋼管の多層盛り溶接残留応力についても述べている [67]. S. Vaidyanathan らは薄肉円管の残留応力分布を求めて, これが平板溶接の結果と異なることを弾性シェル理論によって示した [68, 69]. さらに, B.L. Josefson は溶接された鋼管の焼鈍過程について熱弾塑性クリープ解析によって論じており [70, 71]. 同様の計算は S. Nair の報告にもみられる [72]. また B. Andersson らは溶接割れの亀裂の発生と進展について解析結果から論じ [73]. Z.-B. Kuang らは亀裂の発生を温度分布から考察した [74]. I.C. Sheng らは相変態と液相の流れを考慮した3次元解析を行っているが, ここでは固相で Lagrange 座標系, 液相で Euler 座標系それぞれを用いた解析方法を適用し, 両者を整合させることで流れと応力の解析を行っている [75]-[77]. M. Gu らは座標系に配慮することで大型構造物の溶接過程の定常解析を行った [78]. これらの数値解析のためには, 理論的にばかりではなく計算の準備にも多くの時間を要することから, 作業の簡便性を追求して汎用解析 code による計算も行われている. P. Tekriwal らは ABAQUS によって3次元値熱弾塑性解析を行い [79]. さらに計算結果と実験結果を整合させるための方法を論じている [80]. V.J. Papazoglou らは計算に ADINA を用いていたが [53]. この code によって R.L. Karlsson らは鋼管の溶接の3次元解析を行

い [81], W.W. Wilkening らはビードの形状を予め与えた手法の計算結果を示した [82]. この手法は, 望月・榎本・岡本・斉藤・林の多層盛り溶接の残留応力発生過程の熱弾塑性応力解析などにもみられる [83].

溶接の重要な問題の1つである熱影響部の材料挙動については, 熱影響部の組織の差異と応力緩和との関係を実験により求めた報告 [84] や, 熱影響部の粒界挙動の観察, 溶接過程に生じる相変態に関連した現象が残留応力におよぼす影響を種々の実験による結果から論じたもの [85]-[88], オーステナイト鋼の溶接での結晶粒成長の観察報告 [89] があるが, このように実験による材料挙動の観察は盛んである一方で, これらを忠実にモデル化した上で数値解析によって詳細に論じた報告はみられなかった.

溶融池の対流を調べる研究として, 日向・安田・春日・恩澤は TIG 溶接の溶込みに影響をおよぼす因子を実験的に検討し, 作業の効率化のための提案を行っている [90]. 石崎・石井・岡田・横谷はアークの状態と溶融地の対流に関連づける実験を行い [91, 92], 岡田・中村は溶融地における非対称流の要因とビードの蛇行との関連を実験結果から考察した [93]. これを計算によって調べようとする試みが 1980 年頃から盛んとなっており, まず D.R. Atthey が電磁力による流れを考慮した熱伝導の解析手法によって溶融池形状を数学的に表現する方法を示している [94]. その後, 連続の式, 運動方程式, エネルギー式などを用いて差分法によって数値解析により解く方法が多用されるようになり, まず C.R. Heiple らが溶融池形状におよぼす種々の影響についてしらべ, このうち微量元素の差異による表面張力との関係, さらに流れ分布への影響と溶融池形状の関連などを調べている [95]-[98]. また, G.M. Oreper らが浮力と電磁力, 表面張力を考慮した溶融池の対流の解析結果によって, 溶融池形状の形成過程を詳細に説明した [99, 100]. その他に, 横谷・岡田・松縄の軟鋼に関するもの [101] や K.C. Tsao らの溶着金属の影響も考慮した解析を試みた例 [102] があり, R.T.C. Choo は溶融池内での乱流の影響についても述べている [103]. W.D. Bennon らは凝固問題にこの手法を取入れて解析を行っている [104, 105]. また, Y. Chen らは溶融池の対流も含めた解析を行い [76, 77], S. Kou らや T. Zacharia ら [106]-[113] は溶融池内の 2 重渦が溶融池形状におよぼす影響が大きいことを計算結果によって示し, さらに L.A. Bertram は温度勾配から凝固組織を算出することを提案した [114]. また, これらの多くは解析対象の表面が平坦であると仮定して行われているのに対して, M.C. Tsai らが表面形状の変化も考慮した解析結果を示し [115], T. Zacharia らは流れと表面形状の変化を 3 次元的に解析

し [112, 113], さらに J.-W. Kim らは溶着金属の供給も考慮してビードの形状解析を 3 次元的行った [116, 117].

1.3.2 本論文の目的と構成

本論文の目的は, 基本的に材料の熱・力学的な挙動の表現方法を与えることにあり, とくに, 材料の固相内の組織の変化ばかりではなく固相と液相の相変態, つまり溶融・凝固過程の力学的材料挙動も表現可能な解析方法を与えることを目的とする. またそこでは, 特定の材料の存在を前提条件とするのではなく, 可能な限り熱力学的な考察を論議の出発点とすることによって, 広範囲な対象に適用可能な論議を行うように配慮している. さらに, ここでは工学問題として溶接を主題として取上げ, 論議の過程で非弾性構成式, 固相内の相変態, 溶融・凝固などの現象について述べる. とくにその中では, 応力/ひずみ, 温度, 組織それぞれの問題と, Fig.1.1 のようなこれらの互いの影響を考慮した連成効果 (coupling effect) を念頭におきながら, 問題に対する解析方法の定式化を進めていくものとした.

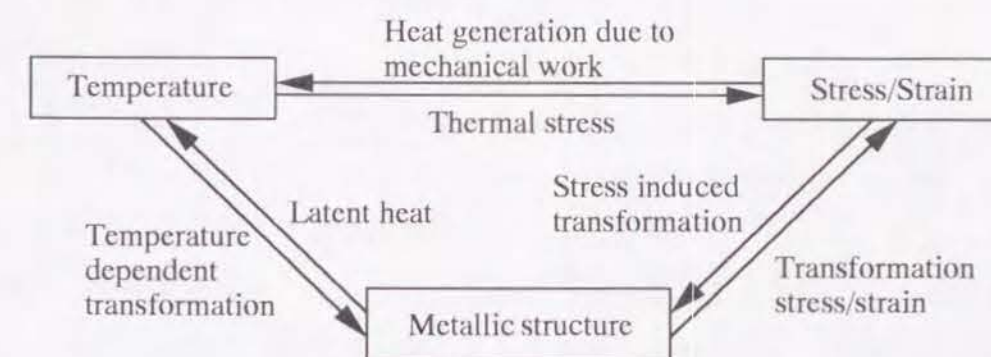


Fig. 1.1. Schematic diagram for coupling effect.

本論文は, 前半に解析に用いられる基本的な条件と関係式, さらには溶融・凝固の解析に用いる新たな解析モデルと関係式を示したものであり, 後半はそれらを工学的な解析に応用, とくに溶接過程の数値解析に応用する方法とその結果を示してある. これは, 前半において解析の基本となる事項について示した後に, それだけでは網羅しきれない数値解

析に必要な諸条件について、後半の諸問題の解析を通じて論じるための構成である。以下で、各章の構成と内容についてさらに説明する。

まず第2章では、解析に用いる関係式の定式化において基本となる支配方程式について、解析モデルを示しながら諸関係式の導出過程を示す。この際、中心的役割を果たしているのが連続の概念であり、本来数学的に出発したにもかかわらず、実際の現象を理論的に取り込む柔軟性をもち合わせたものであったため、これは多彩な方面で活用されているようになっている。本論文においても、工学的な有効性を考慮して、対象を連続体として考えて論議を進める。また、解析対象としては、一般的な唯一の境界によって定義される単領域の解析モデルに加えて、内部に境界が存在する複数の領域から構成され、しかもこの内部境界の位置が領域内で相対的に変化する解析モデル、さらに考えている全ての境界が領域に対して変化する解析モデルを考え、これらの解析モデルで解が満足すべき諸条件を示す関係式と、その証明として導出過程も示すこととした。

続く第3章では、実際に力学的な数値解析を行うために不可欠な材料の応力-ひずみ関係を表す構成式として、相変態を考慮した熱弾粘塑性構成式を与え、この構成関係の性質について示すこととする。とくにここでは、本論文の主題の1つとして溶融・凝固問題が含まれていることから、示した構成式がこの溶融・凝固過程の材料挙動を表現可能であることを示すこととする。また、第2章で示した解析モデルにここで示した構成式を適用し、後で示す実際の解析に適用するための有限要素式の定式化過程についても示す。とくにここでは、溶融・凝固などの相変態と単領域、分割された領域による解析モデルを用いた定式化過程とその結果、さらにこれら定式化の結果と実際の計算方法の関連が示されている。

次の第4章からは、計算結果を示しながら構成されている。まず第4章では、溶接過程でみられる組織の変化、とくに溶融・凝固である固相と液相間の相変態と固相内での拡散変態について、相変態の過程の表示方法について記述することとする。また、拡散変態については、これが温度や応力/ひずみ、時間に大きく依存する性質のものであることなどから、この過程を表現し得る変態の速度式について論じ、この結果として新たな速度式について示すこととする。とくにここでは、本論文で解析対象とする溶接過程においては加熱と冷却の各過程が連続して生じることから、加熱と冷却各過程において観察される相変態を表現する式と、さらにそれら2つ現象の相互関係を与えることによって、これらの連続過程の表示を与えるものとした。また、これら各過程の変態を表す式の検証としては、実

験で得られている恒温変態曲線との比較をこの章の後半で行うこととした。一方、これらの式が加熱・冷却連続過程に適用可能であることについては、ここで示した関係式を次章の溶接過程の数値解析に実際に適用することによって示すこととしている。

第5章からは、実際に溶接過程の応力/ひずみ解析を行った結果について示す。まず第5章では、温度と応力/ひずみ、組織の各解析の連成効果を考慮した解析を行うことを目的として、温度解析に用いる関係式の定式化と、問題の簡単化のため平面応力場における応力/ひずみ問題の有限要素式の定式化の結果について示す。また、これらの結果と第4章の固相内拡散変態に関する関係式を炭素鋼の溶接過程の解析に適用することによって、これらの定式化の結果の検証と共に固相内の変態が溶接過程の過渡的な応力分布、さらに最終的な応力分布に与える影響について論じることとする。

第6章においては、第5章で論じたような相変態が溶接過程でおよぼす過渡的な影響ばかりではなく、この過程の最終的な組織の分布について論じた結果について示す。とくにここでは、熱影響部の組織分布の変化に関連して、SUS304鋼で観察される圧延による加工誘起マルテンサイトが、溶接過程の加熱による逆変態によってオーステナイトへと変化する問題について、この逆変態過程の変態速度式の定式化と数値解析への適用、さらに計算結果と実験結果の比較などから得られる溶接継手の強度的な考察結果について示す。

第7章からは、溶融・凝固過程の力学問題に主眼をおいた解析結果を示す。まず第7章では、固相と液相では材料の力学的性質が大きく異なることから、解析領域を各相ごとに分割し、しかもその相境界が移動する解析モデルを用いて、溶接過程の解析を行った結果について示すこととする。とくにここでは、従来の溶融状態の表現を試みた数値解析では平坦であると仮定する研究が大半であった表面について、第3章で示した定式化の結果を用いることによって、溶接による表面の変形が解析できることを示すばかりではなく、さらに凝固後の応力分布までも表現し得ることを示すこととする。

また第8章においては、従来の研究で考えられることがまれであった溶加材を考慮した応力/ひずみ解析について、これも第3章で示した関係式を用いて数値解析を行った結果について示す。とくに、溶加材供給過程のビード形状と凝固後の応力分布の算出など、従来提案されてきた数値解析では総合的に論じることが困難な諸問題について、ここでの解析結果から論じることが可能であることを示すこととする。

最後にまとめである第9章においては、本論文で示してきた関係式とそれらの溶接過程への適用結果をもとに、相変態を伴う材料の熱・力学的挙動の解析、とくに溶融・凝固を伴う過程の解析方法について示すこととする。本論文で示した内容が実際の工学過程、とくに溶接に伴う諸現象を完全に網羅しているわけではないが、固相内の組織変化から溶融・凝固まで、観察される基本的な現象は一通りここに記述されていることから、これによって本論文の主題に対する考察が可能になると考えられる。

第2章

解析の基礎式

2.1 緒言

工学過程で扱われる材料は、供給されたままの状態で使用されるということはほとんどなく、精製、加工などの複数の過程を経て目的の機能を有する製品への最終段階に至る。これらの過程のいずれかでは、必ずと言って良いほど組織の変化、あるいは相変態を伴う過程が含まれており、同時にこの現象によって材料の機械的性質も変化している。したがって、これらの過程に対して相変態がおよぼす影響に関する考察を行うことは、製品の力学的特性を評価する上で非常に重要である。

相変態を伴う系を扱う研究については、主に気相、液相、固相などの変態とこれら同一相内での変態に関する研究に大別することができるが、これら複数の相が存在する系の挙動に関する研究は、氷の融解の解析的研究などで相境界を求める Stefan 問題 [118] と呼ばれる主題を始め、現在まで自然科学分野の大きな研究テーマの一つとなっている。工学的観点からも、複数の相が存在する問題に対する探求から得られる学術的な成果は、材料の製造や製品の加工、その他の種々の工学過程の評価において重要な役割を担っている。この問題を明確な論拠にもとづいて有効に活用しようとする場合、他の解析学に関する研究で多く行われているように、一般的にはまず数学的な解析手法によって解決が試みられる。しかし、工学的有効性を求める場合には、現実の過程に少しでも近い状態を評価することが求められるため、対象とする解析モデルから得られる関係式は、一般に数学的には解けないほど複雑なものとなる。したがって、このような問題に対しては、関係式の離散化などの過程を経て、計算機を用いた数値シミュレーションによる評価が有効な方法となる。本

論文においても、数値シミュレーションによって相変態を伴う工学過程の解析を試みるが、この場合でも基本原理、基本法則は他の自然科学分野となんら異なるものではない。

そこで、本論文の論議の導入となるこの第2章では、本論文で取り上げる力学の諸問題を論議するための前提条件となる基礎式について、適用される解析モデルを示しながら保存則に関する関係式を示す。また、後半の溶接過程の数値解析に用いることを目的として、対象とする系の変化、とくに境界上で物質点と境界の速度が相変態によって一致しない問題について、保存則に関する記述方法について論じることとする。さらに、系内に領域を分割する境界を考えた上でこれを内部境界とし、外界と接する外部境界が物質点に対して移動しない場合に対して、内部境界の移動と系の基礎式との関連を示す。それに加えて、外部境界、内部境界共に物質点に対して移動する問題に対して、論議の前提となる一般則に関する諸条件を示すことによって、これを複数の相が存在する系の挙動に関する問題の基礎式に関する論議のまとめとする。

2.2 変化の表現

物質が何らかの作用を受けて変形すると、それに伴って物質内の各点の位置も移動する。このような変形を伴う過程の考察を行うに際して、ここで解析対象の変形を表現するために本論文で用いる方法について示す。

2.2.1 座標系、ひずみと速度

初期時刻 $t = 0$ において、注目する物体が空間 V を占めているものとし、その内部の注目する点の座標が X_i で表されるものとする。さらに、この注目する物体が変形後には V' を占め、先の点が x_i に変位したとする。このとき、この時刻 t での注目する点の座標 x_i は X_i 、 t の関数として表され

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t), \quad (2.1)$$

となる。一方、逆の関数関係

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad (2.2)$$

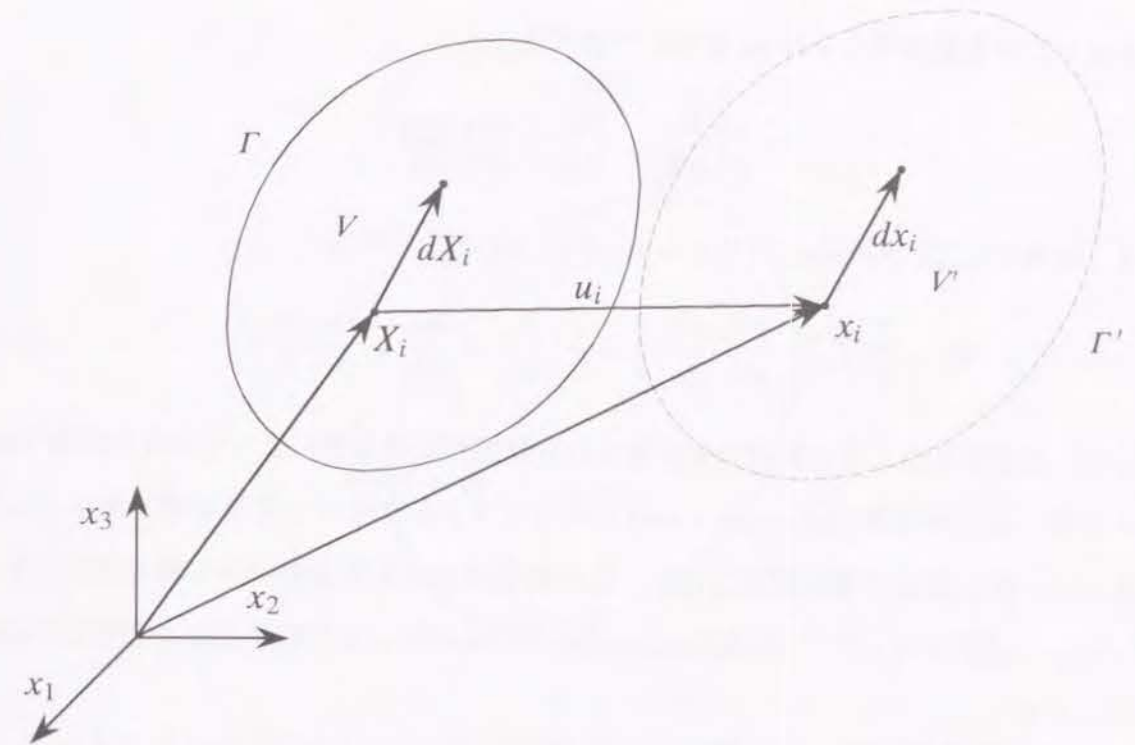


Fig. 2.1. Material coordinates (Lagrangian) and displacement vector u_i .

も可能であるが、連続体においては変形は連続していなければならない、したがって変形の前後で対応する点も1対1対応しなければならない。このための条件は、Jacobi の関数行列式 J が $J = |\partial x_i / \partial X_j| \neq 0$ を満足することである。このとき、変位ベクトル

$$u_i = x_i - X_i, \quad (2.3)$$

は一義的に定義されることとなる。

また、領域 V 内での微小ベクトル dX_i が V' 内で dx_i になったとき、両者の関係は

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j, \quad (2.4)$$

で与えられる。さらに、これらの変形前後でのベクトルの大きさの2乗の差を考えると

$$dx_i dx_i - dX_i dX_i = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) dX_i dX_j = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j, \quad (2.5)$$

となり、これから Green のひずみ \bar{E}_{ij} は

$$\bar{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right), \quad (2.6)$$

で表され、これを変位ベクトル u_i を用いて表すと

$$\bar{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right), \quad (2.7)$$

となる。同様に、Almansi のひずみ \bar{e}_{ij} が次式で与えられる。

$$\bar{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad (2.8)$$

ここで、塑性変形のような除荷の結果得られる状態が変形履歴によって異なる問題では、抱えるべき唯一の基準状態 (reference state) が存在せず、しかも同じ荷重状態であっても履歴によって一般に変形状態が異なるため、このような問題の変形過程は時々刻々とその変化を追っていく必要があって、この場合には現在の状態そのものを基準状態にとらなければならない [120].

そこで、変形を表現するために速度 $v(x_i, t)$ をここでは考える。このとき、速度こう配 (velocity gradient) が $\partial v_i / \partial x_j$ で与えられ、ここから変形速度テンソル (deformation rate tensor) D_{ij} が次式で与えられる。

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.9)$$

また、式 (2.7) の微小ひずみ ε_{ij} を考えて高次項を無視し、さらに X_i を x_i と置換えると

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = D_{ij}, \quad (2.10)$$

となって、微小変形の場合のひずみ ε_{ij} の時間微分は変形速度テンソル D_{ij} に等しくなる [121]. 本論文では、以後この D_{ij} および $\dot{\varepsilon}_{ij}$ をひずみ速度 (strain rate) と呼ぶこととする。

ただし、 $(\dot{})$ は物質微分を表し

$$(\dot{}) = \frac{D()}{Dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + v_i \frac{\partial()}{\partial x_i}, \quad (2.11)$$

である。

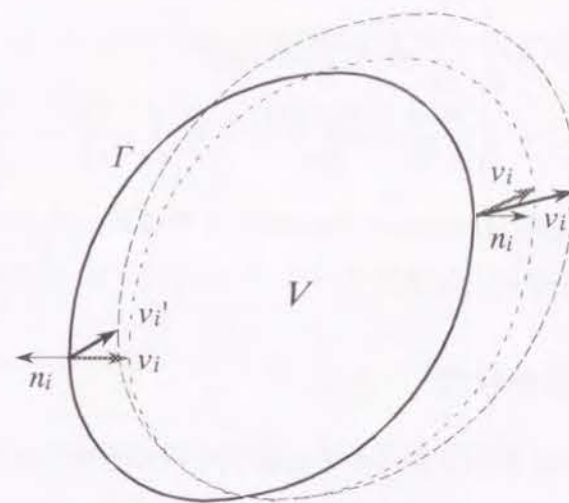


Fig. 2.2. Deformation of the region V surrounded by growing boundary Γ .

2.2.2 変化率による表現

ここで、とくに任意のスカラー、ベクトル、テンソル $\phi(x_i, t)$ の領域 V 内での時間変化については、以下のように考えることができる。いま、観察している変形過程にある系に成立する基礎式を考えるため、Fig.2.2 に示すように法線 n_i で定義される系の境界 Γ が速度 v_i' で移動しているものとする。このとき、領域 V 内の変数 ϕ の変化率は、時間が Δt 経過後の領域 $V + \Delta V$ 内の ϕ と経過前のそれぞれの体積分の差の極限で次のように導出される [122].

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \phi dV &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{V+\Delta V} \phi(x_i, t + \Delta t) dV - \int_V \phi(x_i, t) dV \right\} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_V \phi(x_i, t + \Delta t) dV - \int_V \phi(x_i, t) dV \right\} + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta V} \phi(x_i, t + \Delta t) dV \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

ここで、 $\int_{\Delta V} \phi dV = \int_{\Gamma} \phi n_i v_i' \Delta t d\Gamma$ であることを考慮すると

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \phi dV &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_V \phi(x_i, t + \Delta t) dV - \int_V \phi(x_i, t) dV \right\} + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma} \phi(x_i, t + \Delta t) n_i v_i' \Delta t d\Gamma \right] \\ &= \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{\Gamma} \phi v_i' n_i d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.13)$$

となるが、とくに境界の速度 v_i' と境界上の物質点の速度 v_i が一致する問題では、式 (2.13) において $v_i' = v_i$ とすることによって次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \phi dV &= \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{\Gamma} \phi v_i n_i d\Gamma \\ &= \int_V \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\phi v_i)}{\partial x_i} \right\} dV = \int_V \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV. \end{aligned} \quad (2.14)$$

これは Reynolds の輸送定理 (transport theorem) と呼ばれ、さらに式 (2.13) は一般化された Reynolds の輸送定理という [123].

2.2.3 局所平衡と局所状態

変化のなかでも、系が外界から何らかの影響をうけて変化したときには状態変化をしたといい、このときの系と外界との間では相互作用が生じる。力学的に考えると、系と外界との間で力がつり合っている場合を力学的平衡 (mechanical equilibrium) といい、つり合っていない場合には非平衡といって状態変化が生じ、この変化は力学的な平衡が満足されるまで継続する。熱力学的な平衡条件としてはこの他に化学的平衡 (chemical equilibrium)、熱的平衡 (thermal equilibrium) があって、これら3つの平衡条件が満足されているときは熱力学的平衡 (thermodynamic equilibrium) という。一方、これらの条件がすべて満足されていない状態変化を伴う非平衡状態は、巨視的な熱力学の変数で記述することはできない。しかし、非平衡な系を無数の微小な領域に分割し、その分割された領域内部で温度差などが微小な状態が考えられる場合には、この系の変化の過程は準静的 (quasistatic) と呼ばれ、これは平衡状態に準じて扱うことが可能となって熱力学的な系の変化に適用可能となる [124].

このように、熱力学的な物理現象で非平衡な状態が平衡な状態へと変化しようとする問題については、非平衡な系内の任意の点の現象が巨視的に観察された平衡状態の評価方法に準じて表現できる場合には、この点での表現を用いることによって巨視的に非平衡な系の物理現象の表現が可能となる。ここで、非平衡な系内の微小な点が巨視的な平衡状態と同様な状態にあることを局所平衡 (local equilibrium) といい、この微小な点の状態を巨視的な平衡状態の表現方法で説明可能であることは局所状態の原理 (principle of local state) という。この局所状態は、諸量の勾配を含まない形、つまり平衡状態を満足する形で表現されるが、このためには系内で散逸が十分支配的であることが要求される [125]. 本論文で

2.2. 変化の表現

は、対象とする金属材料の固体や液体の状態は粘性などが支配的であり、解析対象内の任意の点の速度や熱振動は隣接する点と大きな差が生じ難く、したがって内部での温度差などは微小であると考えられるため、この局所平衡の仮定が成立するものとして今後の論議を進めていくものとする。

2.2.4 質量保存則

一般に、質量 M の変化率 \dot{M} は式 (2.14) から次式で与えられる。

$$\dot{M} = \frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho dV. \quad (2.15)$$

質量の保存則 (conservation law of mass) は、この変化率が 0 になるということであるから、これは式 (2.14) から

$$\int_V \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV = 0, \quad (2.16)$$

となる。この局所形からは

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (2.17)$$

が得られる。この関係は連続の式 (continuity equation) と呼ばれるものである。

さて、この連続の式 (2.17) を用いると、密度 ρ も一般に座標と時間の関数で $\rho = \rho(x_i, t)$ であることから、先の変数 ϕ の変化率 $\dot{\phi}$ に関する式 (2.14) において、 $\phi = \rho \bar{\phi}$ とおくことによってその変化率は

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho \bar{\phi} dV &= \int_V \left[\bar{\phi} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} \right\} + \rho \left\{ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i} \right\} \right] dV \\ &= \int_V \rho \frac{D\bar{\phi}}{Dt} dV, \end{aligned} \quad (2.18)$$

で与えることができる。

2.2.5 運動量保存則

任意の領域 V が持つ運動量 $\int_V \rho v_i dV$ の変化量は、領域 V に作用する表面力 \bar{l}_i と物体力 b_i の合力とつり合い

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V \rho b_i dV + \int_{\Gamma} \bar{l}_i d\Gamma, \quad (2.19)$$

の関係が一般に成立する。さらに、式(2.18)および $\bar{t}_i = \sigma_{ji} n_j$ [126] の関係から式(2.19)の局所形は

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho b_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}, \quad (2.20)$$

で与えられる。これは連続体の運動方程式と呼ばれる。

2.2.6 エネルギー保存則

考えている系のエネルギーは内部エネルギー U 、運動エネルギー K の和で与えられるが、この時間変化は系がする仕事 W 、系への熱供給量 Q の時間変化の和と考えることができ、

$$\dot{U} + \dot{K} = \dot{W} + \dot{Q}, \quad (2.21)$$

または

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) dV \\ = \int_V \rho b_i v_i dV + \int_{\Gamma} \sigma_{ji} v_i n_j d\Gamma + \int_V \rho \bar{\gamma} dV - \int_{\Gamma} q_i n_i d\Gamma \\ = \int_V \rho b_i v_i dV + \int_V \frac{\partial(\sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} dV + \int_V \rho \bar{\gamma} dV - \int_V \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV, \end{aligned} \quad (2.22)$$

で表される。ここで、この式(2.22)の左辺は式(2.18)を考慮すると

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) dV = \int_V \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) dV, \quad (2.23)$$

であるので、これと式(2.22)の局所形から

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) = \rho b_i v_i + \frac{\partial(\sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} + \rho \bar{\gamma} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \quad (2.24)$$

となり、さらにこの式(2.24)と式(2.20)を用いて次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) &= \rho b_i v_i + v_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho \bar{\gamma} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \\ &= v_i \left(\rho b_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \right) + \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho \bar{\gamma} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \\ &= \rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} + \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho \bar{\gamma} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{2} \rho \frac{D(v_i v_i)}{Dt} + \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho \bar{\gamma} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

ここで、両辺の共通な項を消去すると、最終的に次に示す内部エネルギー e に関する Gibbs のエネルギー式が得られる。

$$\rho \dot{e} = \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho \bar{\gamma} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}. \quad (2.26)$$

また、応力の対称性 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ を考慮する場合には、ここから次の関係式が得られる。

$$\rho \dot{e} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho \bar{\gamma} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}. \quad (2.27)$$

2.3 物質点と境界の速度が異なる問題

第2.2節では、境界上で物質点と境界の速度が一致する場合、つまり境界を通過する物質が存在しない問題について、この領域内での保存則から得られる関係式について示したが、本節では、外部からの物質供給によって境界を通過する物質が存在するために、境界上で物質点と境界の速度が一致しない問題について、既に示した保存則から得られる新たな関係式について示す。

2.3.1 境界の移動と保存則

Fig.2.2 に示す法線 n_i で定義される境界 Γ が速度 $v'_i (\neq v_i)$ で移動する領域 V を考えると、変数 $\phi(x_i, t)$ の領域 V 内の積分 $\int_V \phi dV$ の物質導関数は、式(2.13)から

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \phi dV &= \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{\Gamma} \phi v'_i n_i d\Gamma \\ &= \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{\Gamma} \phi v_i n_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \phi (v'_i - v_i) n_i d\Gamma \\ &= \int_V \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\phi v_i)}{\partial x_i} \right\} dV + \int_{\Gamma} \phi (v'_i - v_i) n_i d\Gamma \\ &= \int_V \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV + \int_{\Gamma} \phi (v'_i - v_i) n_i d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.28)$$

となる。また、この式(2.28)は移動している領域 V についての積分であるが、ここでは任意の時刻 t において同じ領域 V を占める物質粒子に埋め込まれた体積要素 dV を考えても同じ値をとるため、単位質量当たりの量 $\bar{\phi}$ の領域 V 内の積分については式(2.18)から

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho \bar{\phi} dV &= \int_V \left[\bar{\phi} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} \right\} + \rho \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i} \right) \right] dV + \int_{\Gamma} \rho \bar{\phi} (v'_i - v_i) n_i d\Gamma \\ &= \int_V \rho \frac{D\bar{\phi}}{Dt} dV + \int_{\Gamma} \rho \bar{\phi} (v'_i - v_i) n_i d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.29)$$

と表すことができる。

2.3.2 各保存則から得られる関係

系の質量 M の変化率 \dot{M} については、変数 ϕ の領域 V 内での積分 $\int_V \phi dV$ の物質導関数を表す式 (2.28) において、 $\phi = \rho$ とおくと次のように与えられる。

$$\dot{M} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = \int_V \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV + \int_{\Gamma} \rho(v'_i - v_i)n_i d\Gamma. \quad (2.30)$$

ここで、領域 V 内の質量変化は境界 Γ を通じて流出入する物質によるものと考えることができ、境界 Γ 上の物質流束 ζ_i を新たに導入すると

$$\dot{M} = \int_{\Gamma} \zeta_i n_i d\Gamma, \quad (2.31)$$

となる。これと式 (2.16) を考慮すると、式 (2.30) から次の関係が得られる。

$$\int_{\Gamma} \rho(v'_i - v_i)n_i d\Gamma = \int_{\Gamma} \zeta_i n_i d\Gamma. \quad (2.32)$$

ここで本論文においては、境界の速度 v'_i を式 (2.32) を満足させる次式

$$\zeta_i n_i = \rho(v'_i - v_i)n_i, \quad (2.33)$$

を考え、与えられた物質流束 ζ_i とこの式 (2.33) から境界の速度 v'_i を求めるものとする。

一方、運動量の変化率を導出するために、ここでは $\phi = \rho v_i$ とすると式 (2.29) から

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV + \int_{\Gamma} \rho v_i (v'_j - v_j) n_j d\Gamma, \quad (2.34)$$

となる。ここで、右辺の第1項に式 (2.20)、第2項に式 (2.32) を代入して整理すると、運動量の変化率に対する次式が導出できる。

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV &= \int_V \rho b_i dV + \int_{\Gamma} \sigma_{ji} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma} \zeta_j v_i n_j d\Gamma \\ &= \int_V \rho b_i dV + \int_{\Gamma} (\sigma_{ij} + \zeta_j v_i) n_j d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.35)$$

また、エネルギーの変化率について考えると、式 (2.22) と (2.29) から

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) dV &= \int_V \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) dV + \int_{\Gamma} \rho \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) (v'_j - v_j) n_j d\Gamma \\ &= \int_V \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) dV + \int_{\Gamma} \zeta_j \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) n_j d\Gamma \\ &= \int_V \rho b_i v_i dV + \int_{\Gamma} \sigma_{ji} v'_i n_j d\Gamma + \int_V \rho \gamma dV - \int_{\Gamma} q_i n_i d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.36)$$

とすることができる。ここで、式 (2.20)、(2.26) を考慮に入れると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) dV &= \int_V \rho \frac{De}{Dt} dV + \int_V \rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} dV + \int_{\Gamma} \zeta_j \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) n_j d\Gamma \\ &= \int_V \rho b_i v_i dV + \int_V \frac{\partial(\sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} dV + \int_V \rho \gamma dV - \int_{\Gamma} q_i n_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \zeta_j \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) n_j d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.37)$$

となるので、この結果と式 (2.36) の右辺から境界 Γ に関して次の関係

$$\int_{\Gamma} \zeta_j \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) n_j d\Gamma = \int_{\Gamma} \sigma_{ji} (v'_i - v_i) n_j d\Gamma, \quad (2.38)$$

あるいはこの局所形が、式 (2.38) に発散定理を適用した結果から、次式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \zeta_j \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) \right\} = \frac{\partial \{ \sigma_{ji} (v'_i - v_i) \}}{\partial x_j}. \quad (2.39)$$

2.4 内部境界が移動する問題

相変態を伴う系の支配方程式を考える場合において、この問題を各相の間の境界 (界面、以後内部境界) を考慮して扱う方法がある。ここでは、対象とする領域内で相変態によって内部境界が移動する問題について、解析に用いる関係式の定式化に必要な基礎式に関する考察結果を示す。

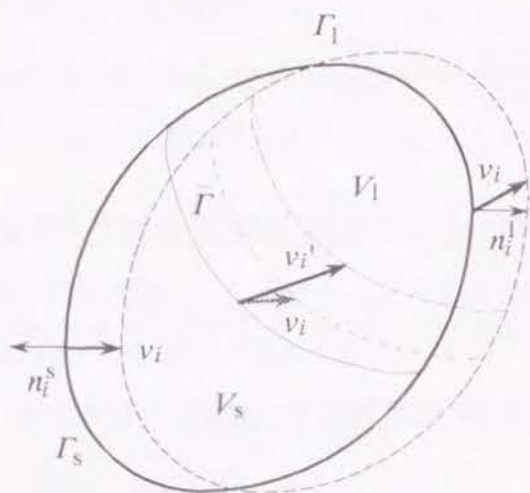
2.4.1 内部境界を考慮した変化率

2つ相 s, l が境界 $\bar{\Gamma} (= \Gamma_s \cup \Gamma_l)$ で接しており、それぞれの相が占める領域 V_s, V_l から全領域 V が構成されている場合について考える。このとき、領域 V の内部の変数 ϕ の時間変化は、2つの領域 V_s, V_l それぞれの内部の変数 ϕ の時間変化の和で表すことができる。

$$\frac{D}{Dt} \int_V \phi dV = \frac{D}{Dt} \left(\int_{V_s} \phi dV + \int_{V_l} \phi dV \right) = \frac{D}{Dt} \int_{V_s} \phi dV + \frac{D}{Dt} \int_{V_l} \phi dV. \quad (2.40)$$

境界 $\bar{\Gamma}$ を通過する物質がない場合、つまり相 s と相 l の間の相変態によって両相の境界が物質点に対して相対的に移動しない場合、内部境界 $\bar{\Gamma}$ の速度 v'_i も境界上の物質点の速度 v_i に一致し、

$$v'_i = v_i \quad \text{on} \quad \Gamma \cup \bar{\Gamma}, \quad (2.41)$$

Fig. 2.3. Region V divided by internal boundary $\bar{\Gamma}$.

の関係が成立する。したがって、2つの領域 V_s , V_l を定義するそれぞれの境界を Γ_s , Γ_l とするとき、式 (2.40) は式 (2.14) から次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \phi dV &= \int_{V_s} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{\Gamma_s} \phi v_i n_i d\Gamma + \int_{V_l} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{\Gamma_l} \phi v_i n_i d\Gamma \\ &= \int_{V_s} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV + \int_{V_l} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV. \end{aligned} \quad (2.42)$$

さらにここで、境界 $\bar{\Gamma}$ が領域内部で移動している場合、つまり相変態によって境界が物質点に対して移動する場合について考える。このとき、境界条件は次のようになる。

$$v_i' = v_i \quad \text{on } \bar{\Gamma}, \quad (2.43)$$

$$v_i' \neq v_i \quad \text{or} \quad v_i' = v_i \quad \text{on } \bar{\Gamma}. \quad (2.44)$$

また、固相領域 V_s の境界 Γ_s と液相領域 V_l の境界 Γ_l はそれぞれ

$$\Gamma_s = (\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}) \cup (\Gamma_s \cap \Gamma), \quad (2.45)$$

$$\Gamma_l = (\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}) \cup (\Gamma_l \cap \Gamma), \quad (2.46)$$

とすることができるので、この場合には式 (2.28), (2.40) から次の関係式を導出できる。

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \phi dV &= \int_{V_s} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV + \int_{\Gamma_s} \phi (v_i' - v_i) n_i d\Gamma \\ &\quad + \int_{V_l} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV + \int_{\Gamma_l} \phi (v_i' - v_i) n_i d\Gamma \\ &= \int_{V_s} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV + \int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \phi (v_i' - v_i) n_i d\Gamma \\ &\quad + \int_{V_l} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \phi (v_i' - v_i) n_i d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.47)$$

2.4.2 諸量の保存則に関する考察

ここでは、第2.4節で既示した定式化の結果を用いて、内部境界が移動する場合の質量、運動量、エネルギーの各保存則に関する考察結果を示す。

まず、質量の保存則に関しては、式 (2.16) で示したように $\phi = \rho$ と考えると、この領域 V 全体では保存則が成立するので

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0, \quad (2.48)$$

が常に成立する。この式 (2.48) と (2.47) の関係から

$$\begin{aligned} \int_{V_s} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV + \int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \rho (v_i' - v_i) n_i d\Gamma \\ + \int_{V_l} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \rho (v_i' - v_i) n_i d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

が得られる。ここで、さらに連続の式 (2.17) を考慮すると、式 (2.49) から境界 $\bar{\Gamma}$ に関する次の式が得られる。

$$\int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \rho (v_i' - v_i) n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \rho (v_i' - v_i) n_i d\Gamma = 0. \quad (2.50)$$

さらに、各領域内で定義される密度をそれぞれ ρ_s , ρ_l 、速度を v_i^s , v_i^l とすると、式 (2.50) の局所形から次式が導出される。

$$\rho_s v_i^s n_i^s - \rho_l v_i^l n_i^s = (\rho_s - \rho_l) v_i^l n_i^s = \Delta \rho v_i^l n_i^s \quad \text{with} \quad \Delta \rho = \rho_s - \rho_l. \quad (2.51)$$

これは、境界 $\bar{\Gamma}$ での速度 v_i の垂直成分の跳躍条件 (jump condition) を表している。ここで、仮に両相の密度が同じである場合を考えて、式 (2.51) において $\rho_s = \rho_l$ とすると

$$\rho_s v_i^s n_i^s - \rho_l v_i^l n_i^s = \rho_s (v_i^s - v_i^l) n_i^s = 0, \quad (2.52)$$

なる関係が得られる。これは、両相間で密度差 $\Delta\rho$ が無い場合には相境界でも速度 v_i の垂直成分が連続となることを示しており、言い換えると両相の密度差 $\Delta\rho$ が存在する場合には速度の跳躍が生じるものと考えられる。

運動量の保存則に関しては、 $\phi = \rho v_i$ とおくと式 (2.47) から次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV &= \int_{V_s} \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV + \int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \rho(v'_i - v_i) v_j n_j d\Gamma \\ &+ \int_{V_l} \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \rho(v'_i - v_i) v_j n_j d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.53)$$

ここで、式 (2.20) から

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV &= \int_{V_s} \rho b_i dV + \int_{\Gamma_s} \sigma_{ji} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \rho(v'_i - v_i) v_j n_j d\Gamma \\ &+ \int_{V_l} \rho b_i dV + \int_{\Gamma_l} \sigma_{ji} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \rho(v'_i - v_i) v_j n_j d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.54)$$

であるので、これと式 (2.19) から内部境界 $\bar{\Gamma}$ に関する次の関係を得ることができる。

$$\int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \sigma_{ji} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \sigma_{ji} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \rho v_i (v'_j - v_j) n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \rho v_i (v'_j - v_j) n_j d\Gamma = 0, \quad (2.55)$$

さらに、この式 (2.55) も局所形に速度 v_i の跳躍条件を表す式 (2.51) を考慮すると

$$\begin{aligned} \sigma_{ji}^s n_j^s - \sigma_{ji}^l n_j^l &= \rho_s v_i^s (v'_j - v_j^s) n_j^s + \rho_l v_i^l (v'_j - v_j^l) n_j^l \\ &= \rho_s (v_i^s - v_i^l) (v_j^s - v_j^l) n_j^s, \end{aligned} \quad (2.56)$$

となる。これは、内部境界 $\bar{\Gamma}$ での境界面に対する垂直応力 (normal stress) $\sigma_{ji} n_j$ の跳躍条件を表している。また、ここで境界 Γ において境界の速度 v'_i が物質点の速度 v_i と一致する場合、あるいは両相の速度が同じ場合 ($v_i^s = v_i^l$) を考えると、式 (2.56) は

$$\sigma_{ji}^s n_j^s - \sigma_{ji}^l n_j^l = 0, \quad (2.57)$$

となる。つまり、境界移動 (相変態) が生じている場合であって、しかも両相に密度差に起因する速度差が存在する場合には、応力の跳躍が生じると考えられる。

また、エネルギー保存則について考えると、この保存則が成立するときに得られる式 (2.27) から

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV = \int_V (\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \rho \bar{\gamma}) dV - \int_{\Gamma} q_i n_i d\Gamma, \quad (2.58)$$

を用いて考える。式 (2.40) において、 $\phi = \rho e$ と考えることによって2相 s, l からなる領域 V の内部エネルギー e の変化率に関する次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV &= \frac{D}{Dt} \int_{V_s} \rho e dV + \frac{D}{Dt} \int_{V_l} \rho e dV \\ &= \int_{V_s} \rho \frac{De}{Dt} dV + \int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \rho e (v'_i - v_i) n_i d\Gamma + \int_{V_l} \rho \frac{De}{Dt} dV + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \rho e (v'_i - v_i) n_i d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.59)$$

この右辺に対して、式 (2.27) を代入した結果と式 (2.58) から、内部境界 $\bar{\Gamma}$ に関する次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \rho e (v'_i - v_i) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} q_i n_i d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \rho e (v'_i - v_i) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} q_i n_i d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

したがって、この局所形から

$$q_i^s n_i^s - q_i^l n_i^l = \rho_s e_s (v'_i - v_i^s) n_i^s - \rho_l e_l (v'_i - v_i^l) n_i^l, \quad (2.61)$$

となる。ここで、先の跳躍条件の式 (2.51) を考慮すると、次の関係を導出することができる。

$$q_i^s n_i^s - q_i^l n_i^l = \rho_s (e_s - e_l) (v'_i - v_i^s) n_i^s. \quad (2.62)$$

これは、領域 V 内での熱流束 q_i の跳躍条件を表している。

また、ここでは従来の移動境界問題とこの第2.4節の定式化の結果を比較するため、代表的移動境界問題である Stefan 問題に関する条件の導出を、これまでの結果を用いて試みる。まず、内部エネルギー e として $e = h + (1/\rho) \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$ を考えた場合には

$$e_s - e_l = h_s - h_l + \frac{1}{\rho_s} \sigma_{jk}^s \epsilon_{jk}^s - \frac{1}{\rho_l} \sigma_{jk}^l \epsilon_{jk}^l, \quad (2.63)$$

なる関係が得られるので、これと Fourier の法則、エンタルピー差 $\Delta h = h_l - h_s$ が両相間の相変態の潜熱 l であることなどを考慮すると、式 (2.62) から

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x_i} n_i^s - k_l \frac{\partial T_l}{\partial x_i} n_i^l = \rho_s \left(l - \frac{1}{\rho_s} \sigma_{jk}^s \epsilon_{jk}^s + \frac{1}{\rho_l} \sigma_{jk}^l \epsilon_{jk}^l \right) (v'_i - v_i^s) n_i^s, \quad (2.64)$$

という関係が得られる。ここで k は熱伝導率である。また、各相内の物質点の速度 v_i と応力 σ_{ij} を無視した場合に式 (2.64) は

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x_i} n_i^s - k_l \frac{\partial T_l}{\partial x_i} n_i^l = \rho_s l v_i' n_i^s, \quad (2.65)$$

となる。これはいわゆる Stefan 条件 [118] であって、ここで示した解析モデルが Stefan 問題を表現可能であることを示している。さらに、応力や各相の速度を考慮した力学問題などに対しては、境界条件として式 (2.51), (2.56), (2.62) を考慮すべきであると考えられる。

2.5 内部および外部境界が移動する問題

材料が溶融状態にあるときには材料の供給や混合が容易であって、実際に多くの工学的プロセスで材料の溶融現象が利用されている。しかし、第 2.4 節で示した解析モデルでは外部境界の速度が境界上の物質点の速度と一致しているため、このような材料が連続的に供給される工学問題の解析には適さない。そこで、ここでは外部から材料が連続的に供給される問題の解析を行うことを目的として、境界の速度が内部境界でばかりではなく外部境界で境界上の物質点の速度に一致しない問題に対して、解が満足すべき条件について考察を行った結果について示す。

2.5.1 全境界の移動を考慮した変化率

本章に示した考察のまとめとして、ここでは 2 相からなる領域 V に対して外部から物理量 ϕ が供給され、さらに 2 相間の境界 $\bar{\Gamma}$ も移動する問題において、成立すべき関係について示す。まず、ここでの速度に関する境界条件は次のように考える (Fig.2.4)。

$$\rho(v_i' - v_i)n_i = \zeta_i n_i \quad \text{on} \quad \Gamma_l \cap \Gamma, \quad (2.66)$$

$$v_i' = v_i \quad \text{on} \quad \Gamma_s \cap \Gamma. \quad (2.67)$$

このとき、領域 V_l 内の物理量 ϕ の変化率は、式 (2.28), 式 (2.40) から次のように表される。

$$\frac{D}{Dt} \int_V \phi dV = \frac{D}{Dt} \int_{V_s} \phi dV + \frac{D}{Dt} \int_{V_l} \phi dV$$

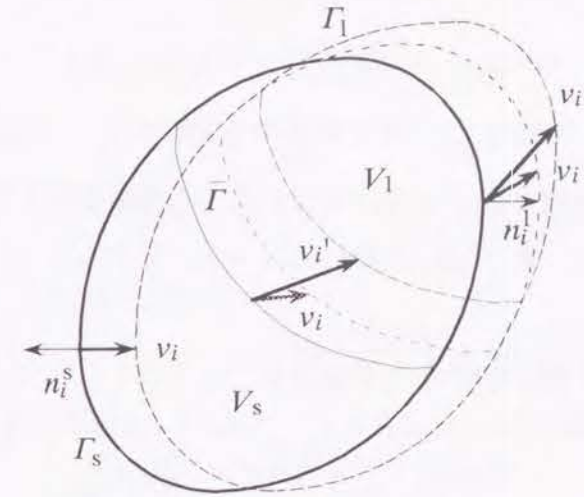


Fig. 2.4. Region V with growing boundary Γ and moving boundary $\bar{\Gamma}$.

$$\begin{aligned} &= \int_{V_s} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{\Gamma_s} \phi v_i' n_i dV + \int_{V_l} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{\Gamma_l} \phi v_i' n_i dV \\ &= \int_{V_s} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV + \int_{\Gamma_s} \phi (v_i' - v_i) n_i dV + \int_{V_l} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV + \int_{\Gamma_l} \phi (v_i' - v_i) n_i dV \\ &= \int_{V_s} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV + \int_{V_l} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV \\ &\quad + \int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \phi (v_i' - v_i) n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \Gamma} \phi (v_i' - v_i) n_i d\Gamma + \int_{\Gamma \cap \Gamma} \phi (v_i' - v_i) n_i d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.68)$$

2.5.2 諸量の変化率に関する考察

先に示した変化率の式 (2.68) を用いて、諸量の変化率に対する関係式を以下に示す。

まず質量保存則については、式 (2.68) において $\phi = \rho$ とした上で式 (2.33) を考慮すると

$$\begin{aligned} \dot{M} &= \int_{V_s} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV + \int_{V_l} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV \\ &\quad + \int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \rho (v_i' - v_i) n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \Gamma} \rho (v_i' - v_i) n_i d\Gamma + \int_{\Gamma \cap \Gamma} \rho (v_i' - v_i) n_i d\Gamma \\ &= \int_{V_s} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV + \int_{V_l} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV \\ &\quad + \int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \rho (v_i' - v_i) n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \Gamma} \rho (v_i' - v_i) n_i d\Gamma + \int_{\Gamma \cap \Gamma} \zeta_i n_i d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.69)$$

となって、これと式(2.17), (2.31) から

$$\int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \rho(v'_i - v_i)n_i + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \rho(v'_i - v_i)n_i = 0, \quad (2.70)$$

あるいはこの局所形

$$\rho_s(v'_i - v_i^s)n_i^s + \rho_l(v'_i - v_i^l)n_i^l = 0, \quad (2.71)$$

が得られ、これを整理した結果は式(2.51)に示す速度の跳躍条件と一致する。

次に、運動量に関しては、式(2.68)において $\phi = \rho v_i$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV &= \int_{V_s} \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV + \int_{V_l} \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV \\ &+ \int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \rho v_i(v'_i - v_i)n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \rho v_i(v'_i - v_i)n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \zeta_j v_i n_j d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.72)$$

となる。これに式(2.20)を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV &= \int_{V_s} \rho b_i dV + \int_{\Gamma_s} \sigma_{ji} n_j d\Gamma + \int_{V_l} \rho b_i dV + \int_{\Gamma_l} \sigma_{ji} n_j d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \rho v_i(v'_i - v_i)n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \rho v_i(v'_i - v_i)n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \zeta_j v_i n_j d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.73)$$

となって、これと式(2.35)より内部境界 $\bar{\Gamma}$ に関する次式が得られる。

$$\int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \{\sigma_{ij} + \rho v_i(v'_j - v_j)\} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \{\sigma_{ij} + \rho v_i(v'_j - v_j)\} n_j d\Gamma = 0, \quad (2.74)$$

あるいは

$$\sigma_{ij}^s n_j^s + \rho_s v_i^s(v'_j - v_j^s)n_j^s + \sigma_{ij}^l n_j^l + \rho_l v_i^l(v'_j - v_j^l)n_j^l = 0. \quad (2.75)$$

これを整理した結果は、式(2.56)に示す応力の跳躍条件に一致するものとなる。

最後に、エネルギーの変化率については、式(2.68)において $\phi = \rho\{e + (1/2)v_i v_i\}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) dV &= \frac{D}{Dt} \int_{V_s} \rho \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) dV + \frac{D}{Dt} \int_{V_l} \rho \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) dV \\ &+ \int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \rho \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) (v'_j - v_j) n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \rho \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) (v'_j - v_j) n_j d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \zeta_j \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) n_j d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.76)$$

となる。これに式(2.20), (2.31)を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) dV &= \int_{V_s} \rho b_i v_i dV + \int_{\Gamma_s} \sigma_{ji} n_j d\Gamma + \int_{V_s} \rho \tilde{\gamma} dV - \int_{\Gamma_s} q_i n_i d\Gamma \\ &+ \int_{V_l} \rho b_i v_i dV + \int_{\Gamma_l} \sigma_{ji} n_j d\Gamma + \int_{V_l} \rho \tilde{\gamma} dV - \int_{\Gamma_l} q_i n_i d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \rho \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) (v'_j - v_j) n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \rho \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) (v'_j - v_j) n_j d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \zeta_j \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) n_j d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.77)$$

となる。これと式(2.37), (2.74)より、内部境界 $\bar{\Gamma}$ に関する次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \rho e(v'_i - v_i) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} q_i n_i d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \rho e(v'_i - v_i) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} q_i n_i d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (2.78)$$

したがって、この局所形から

$$q_i^s n_i^s - q_i^l n_i^l = \rho_s e_s(v'_i - v_i^s) n_i^s - \rho_l e_l(v'_i - v_i^l) n_i^l, \quad (2.79)$$

が得られる。これについても、整理した結果は式(2.62)に示した熱流束の跳躍条件と一致するものである。

したがって、外部供給を考慮した解析モデルの内部境界に関する境界条件を算出した場合、その結果は外部供給を考慮せずに内部境界の移動のみを考慮した第2.5節の結果と一致した。このことは、対象とする解析モデルにおいて巨視的な条件が異なった場合であっても、内部境界の移動など着目する現象について成立すべき条件は一致することを示している。

2.6 結言

本論文における種々の現象の数値解析の前提となるべき諸条件の中で、解析モデルとそこにおける保存則に代表される諸量の変化率の導出によって、そこから得られる関係式をもとに相変態を伴う過程で生じる熱・力学的な条件について示すことを試み、とくに境界で成立すべき条件について重点的に論じた。その結果、相変態に関する問題で相境界とな

る内部境界で成立すべき条件と、与えられた問題とこれらの境界条件の関係について明らかとなった。これらについては、まず内部境界を無視したモデルと考慮したモデルにおける保存則の比較から、内部境界で成立すべき条件を示した。さらにここでは、速度と応力、熱流束に跳躍条件が存在すること、これらの跳躍条件は相変態が生じる過程において相間に密度などの差がある場合に生じることを示した。また、共に内部境界を含む解析モデルであって、しかも外部から物質供給を考慮した解析モデルと無視した解析モデルにおける諸量の変化率の比較から、物質供給の有無が内部で成立すべき条件に影響を与えないことを示した。これらの結果から、系を1つの領域として考える問題ばかりではなく、これを複数の領域に分けて考える問題であってしかもその境界が移動する問題、さらに同時に外部から物質が供給される問題について、これらを解析するために必要な境界条件が示された。

第3章

構成式と有限要素法の定式化

3.1 緒言

第2章においては、変化の表現方法、系の境界条件と系全体で成立すべき関係について示したが、それらだけを用いて系全体の変位や応力を求めることはできず、さらに材料の性質を表現する関係を与える必要がある。この関係を式で与えたものは構成式と呼ばれるが、温度、応力と組織が互いに影響をおよぼしあう物体を考える場合、その材料の熱・力学的挙動はいっそう複雑なものとなるため、これを簡単に記述することはできない。さらに、このように複雑な材料挙動を任意の境界条件にもとづいて解く境界値問題 (boundary value problem) については、与えられた基礎式および構成式にもとづく計算も当然のように膨大な量となるために、有限要素法 (finite element method, FEM) に代表される数値解析によって解くことを余儀なくされる。材料は一般的に液相、固相などの相ごとに固有の性質を持っているが、本論文で解析対象とする溶接は温度、応力/ひずみばかりではなく溶融・凝固などの相の変化を伴う過程であるため、この解析に用いる構成式も相変態を表現可能である必要がある。したがって、本論文における構成式としては、相変態による機械的性質の変化や密度差による変態ひずみを考慮することに加えて、さらに液体、固体どちらの材料挙動も表現可能なものが適当であると考えられる。しかも、溶融・凝固による材料特性の差異の問題に対する影響度によっては、構成式ばかりではなく数値解析の定式化などの解法に関しても適当な考察を加える必要がある。

したがって第3章では、構成式の特性を評価しながら、まず溶融・凝固を含めた溶接過程の解析に必要な条件を示す。とくに、本論文で用いる粘塑性構成式の Perzyna モデルが

ここでの解析に適するものであることと共に、これを用いた相変態を考慮した熱弾粘塑性有限要素法の定式化方法についても示す。一方、熔融状態における材料挙動に着目する問題では、先の弾粘塑性有限要素法によっては表現しきれない面があるため、これを補う手法の1つとして相変態を考慮した熱剛粘塑性有限要素法の定式化方法について示す。また、さらに剛粘塑性モデルが残留応力解析に用いることができないことを補うため、同一の「相変態を考慮した熱弾粘塑性構成式」を用いながらも、第2章で示した系が複数の領域からなるモデルを用いて、固相領域では弾粘塑性有限要素法、液相領域では剛粘塑性有限要素法が導出できることを示し、さらにこの結果を用いて溶接などの熔融・凝固過程の熱と組織、熔融時の変形と最終的な応力分布までを算出する方法について示すこととする。

3.2 材料と構成式

3.2.1 変形挙動と力学的構成式

材料は力を加えられることによって変形するが、この変形挙動は材料ごとに異なる特徴を持っていて、微視的に考えるとこの現象は原子または分子の配列が変化することに依存している。しかし、観察される挙動を巨視的に捉えようとする連続体力学においては、一般的に変形を表現可能な応力とひずみの関係を表すモデルを考えて解析が行われる。このように、実際の材料の応力とひずみの関係は、本来は微視的に非常に複雑な現象に依存するものであるが、この解析のために変形をモデル化する構成式の提案が今日まで多く行われている [127]-[134]。例えば、Fig.3.1(a) に示すような軟鋼などの引張試験の応力-ひずみ曲線ではひずみとともに応力が複雑に変化するが、このような材料の場合、弾性限界以下で外力などが無くなればもとの状態に戻る。この可逆的性質を表現する構成式の代表的なものとして、Hooke の法則に代表される弾性構成式がある。この Hooke の法則で表現可能な力学的問題は、応力とひずみが1次関係で表現されているために解析が比較的容易であるが、比例限界を超えると非線形変形を示したり、さらに降伏点以上では非可逆な永久ひずみが生じるという複雑な応力-ひずみ関係を表現することはできない。この永久ひずみは非弾性ひずみ (in-elastic strain)、あるいは塑性ひずみ (plastic strain) などとも呼ばれるが、これを数学的に容易に取扱うために近似的に表現した解析モデルとして、直線硬化など硬化の形態を仮定した弾塑性 (elasto-plastic) 構成式 (Fig.3.1(b)) や硬化を考えない弾完

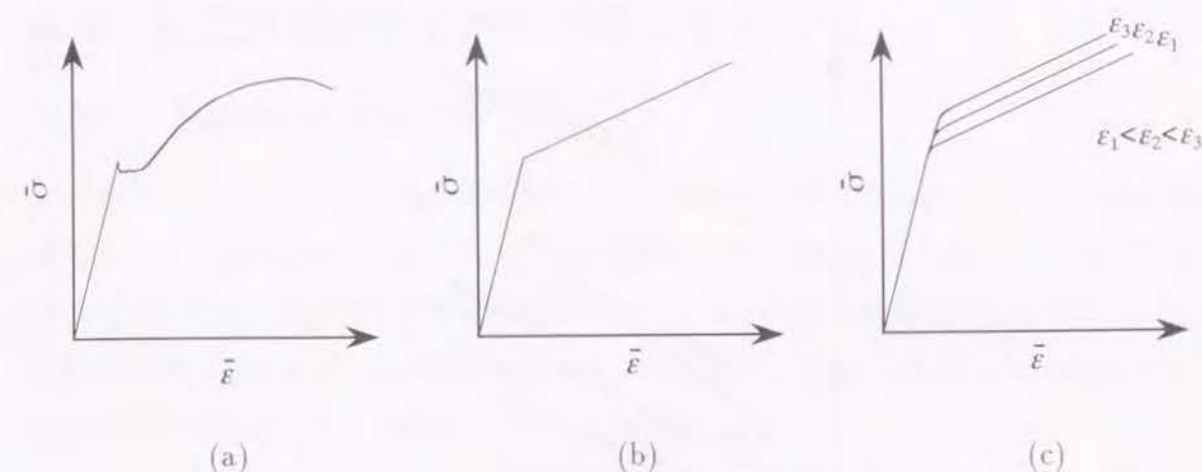


Fig. 3.1. Schematic of stress-strain curves; experimental result(a), linear hardening elasto-plastic model(b) and elasto-viscoplastic model(c).

全塑性 (elastic perfect plastic) 構成式、さらに弾性ひずみをも無視した剛完全塑性 (rigid perfect plastic) 構成式などの非弾性構成式がある。しかし、一般にこのような非弾性ひずみは粘性に依存するため、この時間依存性をさらに考慮した creep に関する構成式や粘塑性 (viscoplastic) 構成式など、材料の特性や解析目的に応じた種々の構成式が提案されている。

一方、流体の力学的挙動に関しては、粘性を考慮した粘性流体 (viscous fluid) とこれを無視した理想流体 (ideal fluid)、さらに粘性を考慮したモデルの中でも応力と変形速度が1次関係にある Newton 流体 (Newtonian fluid) とこれ以外の非 Newton 流体 (non-Newtonian fluid) と分けて考えることができる。また、非 Newton 流体の中でも、Fig.3.2 に示すようにその特性によって多くのモデルが考えられており、対象とする流体に応じて適切な構成式を選択する必要がある。

3.2.2 溶接過程の材料挙動と構成式

一般に、金属材料の力学問題では、材料は常温で弾性体。さらに降伏点を超えた状態で塑性などとした弾塑性体として扱う場合が多い。しかし、本論文で解析対象とする溶接などの熔融・凝固問題では、熔融点近傍の超高温や熔融状態の材料挙動も表現する必要があ

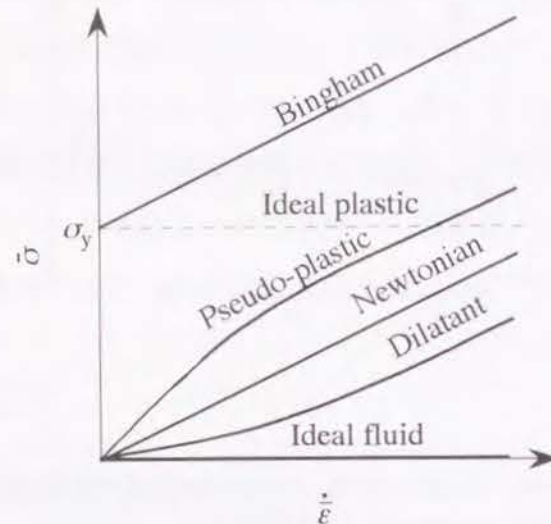


Fig. 3.2. Reological diagram.

るため、材料の粘性の効果やこれを流体と考える必要も生じる。このような条件に対して、溶接問題も含めた一般に行われる多くの工学問題に関する解析では、観察される多くの性質の中で着目すべきいくつかの現象に主眼をおき、他は理想化と称して他の現象に含めて考えるか無視する場合が多い [135]。しかしながら、金属材料の溶融・凝固の一連の過程を経る応力/ひずみ問題に関して考えると、弾性体とした場合には残留応力の発生過程や溶融状態の材料挙動が表現できず、弾塑性体とした場合でも溶融状態の材料挙動、粘性流体では固体の変形挙動や残留応力の発生過程がそれぞれ表現できない。つまり、本来の溶融・凝固過程の応力/ひずみ問題の解析においては、固体の弾性と非弾性、さらには流体の材料挙動を表現可能な構成関係が必要である。

このような問題に対して、塑性ひずみのひずみ速度依存性に着目した弾粘塑性モデル (Fig.3.1(c)) では、固体に関して考えられたモデルであるにも関わらず、非可逆ひずみが粘性に依存しているので液体の材料挙動が表現できる可能性がある。とくに、P. Perzyna によって提案された粘塑性モデルは、ある条件下で非圧縮性 Newton 流体の材料挙動が表現可能 [136] であって、これを用いた弾粘塑性構成式は溶融状態の材料挙動を表現しつつ、残

留応力の発生過程の解析に用いることができる [55]-[57]。したがって本章では、Perzyna モデルを用いて今後の数値シミュレーションに必要な関係式の定式化を行うこととする。

3.3 粘塑性構成式と有限要素法の定式化

3.3.1 Perzyna 形粘塑性モデル

Perzyna は、生じる時間依存の粘塑性ひずみは応力が降伏曲面から超えた大きさに依存するという、超過応力の考えにもとづく粘塑性モデルを提案した [137]。このモデルは非弾性ひずみのひずみ速度依存性を表現可能であり、さらに適当に修正することによって液相と固相の材料挙動を同時に表現可能であるので [136]、本節においては Perzyna モデルとこのモデルの本論文中での取扱いについて説明する。

Perzyna によって提案されたモデルによる粘塑性ひずみ ε_{ij}^{vp} は、応力 σ_{ij} が降伏曲面を超えたときに生じ、その速度は超えた程度に依存する非弾性ひずみである。ここで、流れの法則として法線則 (normality rule) を用いると、この粘塑性ひずみ ε_{ij}^{vp} は次式で表現することができる。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \psi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (3.1)$$

ただし、 γ は材料定数であり F は降伏関数である。また、 $\langle \rangle$ は Macauley 記号であって

$$\langle \psi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & (F < 0) \\ \psi(F) & (F \geq 0) \end{cases}, \quad (3.2)$$

を表す。関数 ψ については、Perzyna によって次のような種々の形式が提案されている。

$$\psi(F) = F, \quad (3.3)$$

$$\psi(F) = F^n, \quad (3.4)$$

$$\psi(F) = \exp(F) - 1, \quad (3.5)$$

$$\psi(F) = \exp(F^n) - 1. \quad (3.6)$$

さて、ここで Perzyna モデルの粘性に関する考察を示す [136]。粘塑性ひずみ ε_{ij}^{vp} は粘性に依存したひずみであるので、一般に粘性係数 μ 、偏差応力 s_{ij} を用いて

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \frac{1}{2\mu} s_{ij}, \quad (3.7)$$

で定義される。一方、式(3.1)で定義された粘塑性ひずみ ε_{ij}^{vp} は、降伏応力 σ_y を用いる降伏関数 F として次式で定義される Mises 形の降伏関数

$$F = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2} - \sigma_y, \quad (3.8)$$

あるいは、偏差応力 s_{ij} の第2不変量 $J_2 (= (1/2) s_{ij} s_{ij})$ を用いて

$$F = \sqrt{3J_2} - \sigma_y, \quad (3.9)$$

を考えると、

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \psi(\sqrt{3J_2} - \sigma_y) \rangle \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} s_{ij}, \quad (3.10)$$

とすることができる。したがって、この式(3.10)と式(3.6)から次の関係が導出される。

$$\frac{1}{2\mu} = \frac{\gamma\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} \langle \psi(\sqrt{3J_2} - \sigma_y) \rangle. \quad (3.11)$$

ここで、関数 ψ として式(3.4)を用いる場合、粘塑性ひずみ ε_{ij}^{vp} は

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \frac{\gamma\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} \langle (\sqrt{3J_2} - \sigma_y)^n \rangle s_{ij}, \quad (3.12)$$

となるので、次の関係が導出される。

$$\mu = \frac{(\dot{\varepsilon}^{vp}/\gamma)^{1/n} + \sigma_y}{3\dot{\varepsilon}^{vp}} \quad \text{with} \quad \dot{\varepsilon}^{vp} = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \right)^{1/2}. \quad (3.13)$$

さらに、金属などの材料の熔融状態では降伏応力 σ_y は0となるので、式(3.13)で $\sigma_y \rightarrow 0$ とし、また $n \rightarrow 1$ とおくと

$$\mu = \frac{1}{3\gamma}, \quad (3.14)$$

となる。したがって、粘性係数 μ は材料定数 γ に依存することになって、ここで示す構成式は応力とひずみ速度の1次関係を表現可能であることを示している。つまり、これらの式を書き直すことによって次の非圧縮性 Newton 流体の構成式

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \quad \text{with} \quad p = -\frac{1}{3}\sigma_{kk}, \quad (3.15)$$

が導出できる。このことは、本論文で取りあげる Perzyna モデルが固体の非弾性挙動と流体の挙動、つまり熔融・凝固過程の材料挙動を表現可能であることを示している。

3.3.2 相変態を考慮した熱弾粘塑性構成式

常温から熔融状態までの材料挙動を表現するため、本論文では全ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ を

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^T + \dot{\varepsilon}_{ij}^m + \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}, \quad (3.16)$$

で表す[56]。ここで、 ε_{ij}^e は弾性ひずみ、 ε_{ij}^T は熱ひずみ、 ε_{ij}^m は変態ひずみ、 ε_{ij}^{vp} は Perzyna 形粘塑性ひずみである。

このとき、弾性ひずみ ε_{ij}^e は Young 率 E と Poisson 比 ν を用いて次式で表される。

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad (3.17)$$

熱ひずみ ε_{ij}^T 、変態ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}^m$ はそれぞれ

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^T = \alpha \dot{T} \delta_{ij}, \quad (3.18)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^m = \sum_I \beta_I \xi_I \delta_{ij}, \quad (3.19)$$

で与えられる。ここで、 α は熱ひずみ速度、 β_I 、 ξ_I はそれぞれ組織 I の変態膨張係数、体積分率である。

さらに、これらを直角座標系に対してマトリックス表示すると次のようになる。

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}^e\} + \{\dot{\varepsilon}^T\} + \{\dot{\varepsilon}^m\} + \{\dot{\varepsilon}^{vp}\}, \quad (3.20)$$

ただし

$$\{\varepsilon^e\} = [D^e]\{\sigma\}, \quad (3.21)$$

$$\{\dot{\varepsilon}^T\} = \{\alpha\}\dot{T}, \quad (3.22)$$

$$\{\dot{\varepsilon}^m\} = \sum_I \{\beta_I\}\dot{\xi}_I, \quad (3.23)$$

$$\{\dot{\varepsilon}^{vp}\} = \frac{1}{2\mu}\{s\}, \quad (3.24)$$

であって

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}_x \ \dot{\varepsilon}_y \ \dot{\varepsilon}_z \ \dot{\gamma}_{xy} \ \dot{\gamma}_{yz} \ \dot{\gamma}_{zx}\}^T, \quad (3.25)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^T, \quad (3.26)$$

$$\{s\} = \{s_x \ s_y \ s_z \ s_{xy} \ s_{yz} \ s_{zx}\}^T, \quad (3.27)$$

$$\{\alpha\} = \{\alpha \ \alpha \ \alpha \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \quad (3.28)$$

$$\{\beta_I\} = \{\beta_I \ \beta_I \ \beta_I \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \quad (3.29)$$

である。また、 $[D^e]$ は弾性マトリックスであって、3次元の場合には次のようになる。

$$[D^e]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -\nu & 1 & & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}, \quad \text{sym.} \quad (3.30)$$

$$[D^e] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & & & & & \\ \nu & 1-\nu & & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}. \quad \text{sym.} \quad (3.31)$$

したがって、式(3.20)は

$$\{\dot{\epsilon}\} = [D^e]^{-1}\{\dot{\sigma}\} + \frac{\partial[D^e]^{-1}}{\partial T}\{\sigma\}\dot{T} + \sum_I \frac{\partial[D^e]^{-1}}{\partial \xi_I}\{\sigma\}\dot{\xi}_I + \{\alpha\}\dot{T} + \sum_I \{\beta_I\}\dot{\xi}_I + \frac{1}{2\mu}\{s\}, \quad (3.32)$$

となり、これを応力について解くと次式が導かれる。

$$\{\dot{\sigma}\} = [D^e] \left(\{\dot{\epsilon}\} - \frac{\partial[D^e]^{-1}}{\partial T}\{\sigma\}\dot{T} - \sum_I \frac{\partial[D^e]^{-1}}{\partial \xi_I}\{\sigma\}\dot{\xi}_I - \{\alpha\}\dot{T} - \sum_I \{\beta_I\}\dot{\xi}_I - \frac{1}{2\mu}\{s\} \right). \quad (3.33)$$

3.3.3 有限要素法の基礎理論

この第3.3節においては、ここまでは本論文の解析に必要な基礎式および構成式について示したが、これらを用いて実際の工学的問題を所定の境界条件下で直接解くことは容易ではない。そこで、本論文では計算機を用いた数値シミュレーションでの解析を試みることになるが、ここではシミュレーションの手法として有限要素法を用いる。

有限要素法とは、解析対象を有限の大きさの要素に分割してその集合体とし、これを計算モデルとして所定の計算手法によって目的の解を求める方法である (Fig.3.3)。このとき、まず対象とする物体領域 V を考えると、これはそれぞれ n 個の節点を持つ有限個の要素 dV に分割されることとなる。ここで、各要素は n 個の節点で隣接する要素と連結され、

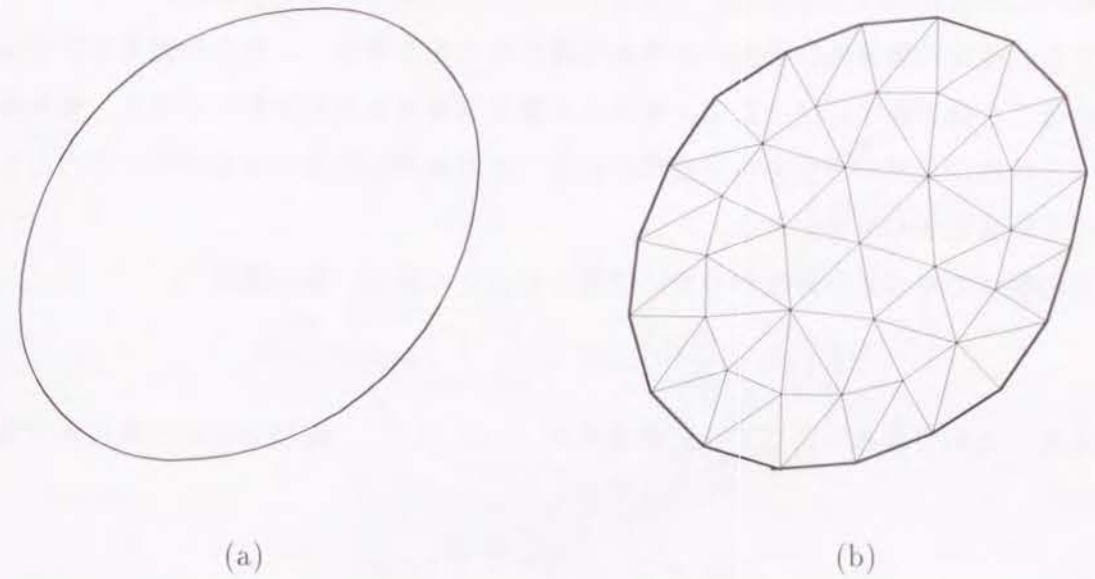


Fig. 3.3. Modeling of system; continuous model(a) and finite element model(b).

これらの共有節点において同一の速度 $\{v\}$ であるとする。この場合の要素内部の速度 $\{v\}_e$ は、形状関数 $[N]$ によって次のように与えられるものとする。

$$\{v\}_e = [N]\{v\}. \quad (3.34)$$

ここで、節点の速度 $\{v\}$ と要素内部の速度 $\{v\}_e$ はそれぞれ

$$\{v\} = \{v_{1x} \ v_{1y} \ v_{1z} \ v_{2x} \ v_{2y} \ v_{2z} \ \dots \ v_{nx} \ v_{ny} \ v_{nz}\}^T, \quad (3.35)$$

$$\{v\}_e = \{v_x \ v_y \ v_z\}^T, \quad (3.36)$$

とする。ひずみ速度 $\{\dot{\epsilon}\}$ は、式(2.9)および式(3.34)から

$$\{\dot{\epsilon}\} = [\hat{B}]\{v\}_e = [\hat{B}][N]\{v\} = [B]\{v\} \quad \text{with} \quad [B] = [\hat{B}][N], \quad (3.37)$$

と表すことができる。ただし、

$$[\hat{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T, \quad (3.38)$$

である。これらの関係を用いることによって、 n 個の節点変位から物体領域 V の変形が与えられ、これと式 (3.37) の関係から要素内のひずみの分布が求められる。

しかし、所定の境界条件を満足する問題の解である値は、これらの関係だけでは一般に求めることはできない。そこで、求める正解が満足する条件を新たに考え、その条件を満足する状態から解の導出を行う必要がある。その条件の代表的なものの一つとして、次に挙げる仮想仕事の原理がある。

任意の物体でその系の静的つり合い状態を仮定した場合、次の関係

$$\int_V \left(\rho b_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) v_i dV = \frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV = 0, \quad (3.39)$$

を考察することができる。ここで、仕事量速度 \dot{W} について、式 (2.21) から次に示す関係が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \int_V \rho b_i v_i dV + \int_{\Gamma} \bar{t}_i v_i d\Gamma \\ &= \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV. \end{aligned} \quad (3.40)$$

また、静的つり合いを満足する σ_{ij} , b_i , \bar{t}_i に関しては、先の関係で任意の速度 δv_i を仮に考える場合、さらに次の関係

$$\delta \dot{W} = \int_V \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_V \rho b_i \delta v_i dV + \int_{\Gamma} \bar{t}_i \delta v_i d\Gamma, \quad (3.41)$$

あるいは

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_V \rho b_i \delta v_i dV - \int_{\Gamma} \bar{t}_i \delta v_i d\Gamma = 0, \quad (3.42)$$

が常に成立する。ここで、 δv_i は仮想速度、 $\delta \dot{W}$ は仮想仕事とよばれ、静的つり合い状態では任意の仮想速度 δv_i に対してこれらの関係が常に成立することを仮想仕事の原理 (principle of virtual work) という。とくに、有限個の要素 V_e に分割された領域 V について考えると、式 (3.42) の関係は

$$\sum_V \left(\int_{V_e} \{\sigma\}^T \{\delta \dot{\varepsilon}\} dV - \int_{V_e} \{\bar{t}\}^T \{\delta v\}_e d\Gamma - \int_{V_e} \{\rho b\}^T \{\delta v\}_e dV \right) = 0, \quad (3.43)$$

となり、この式 (3.43) の関係を満足する条件から問題の正解が与えられる。

このように、境界値問題を直接解く代わりに適当な関数を解くことで解が求められることを変分原理 (variational principle) といい、この方法を変分法 (variational method) という。ここで示した仮想仕事の原理の他にも数々の変分原理が示されており [138]、本論文で用いる有限要素法の定式化においてもこれらの手法を利用することとする。

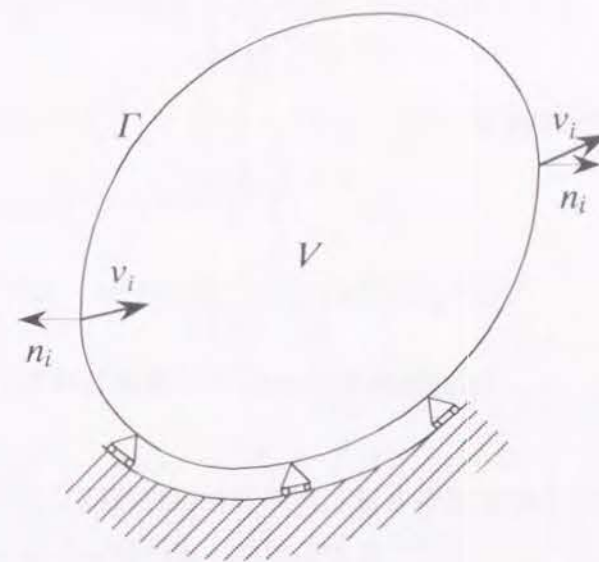


Fig. 3.4. Model for mechanical analysis of boundary value problem.

3.3.4 弾粘塑性構成式を用いた定式化

ここでは、既を示した相変態を考慮した熱弾粘塑性構成式を用い、実際の有限要素法の定式化法について示すこととする。定式化にあたっては、Fig.3.4 に示す解析モデルを考え、その領域内に複数の相が存在するものとする。

解析対象となる領域内に複数の組織が存在する問題を厳密に扱うためには、本来その存在形態を適切に表現可能な方法を用いる必要があるが、ここでは簡便性から混合則 (rule of mixture) を用いて考えることとする。とくに、ここでは混合状態の概念として基本的な連続直列形を考える。このとき、まず組織 I の体積分率 $\xi_I (I = 1, \dots, N)$ については、対象となる領域 V とその組織の体積 V_I を用いて

$$\xi_I = \frac{V_I}{V}, \quad (3.44)$$

で表される。ただし、 $\sum_{I=1}^N \xi_I = 1$ である。混合状態として連続直列形を考えるとき、任意の材料変数 χ は組織 I の材料変数 χ_I を用いて

$$\chi = \sum_{I=1}^N \xi_I \chi_I \quad (3.45)$$

で表される。例えば、縦弾性係数 E は

$$\frac{1}{E} = \sum_I^N \frac{\xi_I}{E_I} \quad (3.46)$$

で与えられ、線膨張係数 α は

$$\alpha = \sum_I^N \xi_I \alpha_I, \quad (3.47)$$

熱伝導率 λ は

$$\frac{1}{\lambda} = \sum_I^N \frac{\xi_I}{\lambda_I} \quad (3.48)$$

となる。ここで、 E_I , α_I , λ_I はそれぞれ組織 I の縦弾性係数、線膨張係数、熱伝導率である。

また、これらの関係と相変態を考慮した熱弾粘塑性構成式を用いた有限要素式の導出方法は以下の通りである [56]。まず、速度形仮想仕事の原理の式

$$\sum_V \left(\int_{V_e} \{\dot{\sigma}\}^T \{\delta \dot{\varepsilon}\} dV - \int_{\Gamma_e} \{\dot{t}\}^T \{\delta v\}_e d\Gamma - \int_{V_e} \{\rho \dot{b}\}^T \{\delta v\}_e dV \right) = 0, \quad (3.49)$$

を考える。ここで、式 (3.37) から

$$\{\delta \dot{\varepsilon}\} = [\hat{B}] \{\delta v\}_e, \quad (3.50)$$

であるので、

$$\sum_V \left\{ \int_{V_e} ([\hat{B}] \{\delta v\}_e)^T \{\dot{\sigma}\} dV - \int_{\Gamma_e} \{\delta v\}_e^T \{\dot{t}\} d\Gamma - \int_{V_e} \{\delta v\}_e^T \{\rho \dot{b}\} dV \right\} = 0, \quad (3.51)$$

と考えることができる。さらに、式 (3.33) を代入すると次のようになる。

$$\sum_V \left\{ \int_{V_e} ([\hat{B}] \{\delta v\}_e)^T [D^e] \left(\{\dot{\varepsilon}\} - \{\bar{\alpha}\} \dot{T} - \sum_I \{\bar{\beta}_I\} \dot{\xi}_I - \frac{1}{2\mu} \{s\} \right) dV - \int_{\Gamma_e} \{\dot{t}\}^T \{\delta v\}_e d\Gamma - \int_{V_e} \{\rho \dot{b}\}^T \{\delta v\}_e dV \right\} = 0. \quad (3.52)$$

また、式 (3.34) から

$$\{\delta v\}_e = [N] \{\delta v\}, \quad (3.53)$$

となるので、

$$\{\delta v\}^T \sum_V \left\{ \int_{V_e} [B]^T [D^e] \left(\{\dot{\varepsilon}\} - \{\bar{\alpha}\} \dot{T} - \sum_I \{\bar{\beta}_I\} \dot{\xi}_I - \frac{1}{2\mu} \{s\} \right) dV - \int_{\Gamma_e} [N]^T \{\dot{t}\} d\Gamma - \int_{V_e} [N]^T \{\rho \dot{b}\} dV \right\} = 0, \quad (3.54)$$

となる。

ここで、式 (3.54) が任意の仮想速度 $\{\delta v\}$ に対して成立するとき、次のマトリックス式が得られる。

$$[K] \{v\} = \{\dot{f}^t\} + \{\dot{f}^b\} + \{\dot{f}^T\} + \{\dot{f}^m\} + \{\dot{f}^{vp}\}. \quad (3.55)$$

ここでの各項はそれぞれ次式で与えられる。

$$[K] = \sum_V [K]_e \quad \text{with} \quad [K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D^e] [B] dV, \quad (3.56)$$

$$\{\dot{f}^t\} = \sum_V \{\dot{f}^t\}_e \quad \text{with} \quad \{\dot{f}^t\}_e = \int_{\Gamma_e} [N]^T \{\dot{t}\} d\Gamma, \quad (3.57)$$

$$\{\dot{f}^b\} = \sum_V \{\dot{f}^b\}_e \quad \text{with} \quad \{\dot{f}^b\}_e = \int_{V_e} [N]^T \{\rho \dot{b}\} dV, \quad (3.58)$$

$$\{\dot{f}^T\} = \sum_V \{\dot{f}^T\}_e \quad \text{with} \quad \{\dot{f}^T\}_e = \int_{V_e} [B]^T [D^e] \{\bar{\alpha}\} \dot{T} dV, \quad (3.59)$$

$$\{\dot{f}^m\} = \sum_V \{\dot{f}^m\}_e \quad \text{with} \quad \{\dot{f}^m\}_e = \int_{V_e} [B]^T [D^e] \sum_I \{\bar{\beta}_I\} \dot{\xi}_I dV, \quad (3.60)$$

$$\{\dot{f}^{vp}\} = \sum_V \{\dot{f}^{vp}\}_e \quad \text{with} \quad \{\dot{f}^{vp}\}_e = \int_{V_e} [B]^T [D^e] \frac{1}{2\mu} \{s\} dV. \quad (3.61)$$

ただし、 $\{\bar{\alpha}\}$, $\{\bar{\beta}\}$ はそれぞれ次式とする。

$$\{\bar{\alpha}\} = \{\alpha\} + \frac{\partial [D^e]^{-1}}{\partial T} \{\sigma\}, \quad (3.62)$$

$$\{\bar{\beta}_I\} = \{\beta_I\} + \frac{\partial [D^e]^{-1}}{\partial \xi_I} \{\sigma\}. \quad (3.63)$$

またここで、さらに液相の材料挙動に関して考察すると、一般に液体では Hooke の法則にもとづく弾性的な挙動は示さないものであって、金属の熔融状態においても同様に考えることができる。このとき、式 (3.32) の右辺の第1項から3項までが0となるため、これに続く式 (3.33) が熔融した領域では導出できない。つまり、式 (3.55) で示した有限要素式は、本来は液体の材料挙動の解析には適用できないものである。このような問題に対して、材料の凝固後の応力分布などを論じる場合には、変形抵抗が未熔融部と比べて著しく小さいことが実験的に観察されるため、熔融部の Young 率 E を小さくすることによって解析が行われることが多い。しかし、このことは式 (3.55) の係数行列 (剛性マトリックス) $[K]$ の対角成分が他の部分に比べて小さくなるため、液相領域に関する適当な解を得ることができなくなり、さらに Young 率 E を $E = 0$ と考えた場合には係数行列 $[K]$ が特異となってし

まうこととなる。つまり、液体の材料挙動の解析を行う場合には、ここで示した定式化の結果を用いることは厳密には適当ではないと考えることができる。

そこで第3.3.5節では、式(3.16)において $\dot{\varepsilon}_{ij}^* = 0$ とした場合の有限要素法の定式方法を示すこととする。

3.3.5 剛粘塑性構成式を用いた定式化

弾性ひずみを考慮しない Perzyna モデルの剛粘塑性構成式による数値解析は、塑性加工に要する力のひずみ速度依存性の検討などに用いられる [136] が、先に示したようにこの構成関係は非圧縮性 Newton 流体の挙動も表現可能であることから、溶融・凝固現象の解析にも適用可能であると考えられる。したがってここでは、剛粘塑性構成式による有限要素法の定式化方法を、先に示した弾粘塑性構成式の場合と同様に、温度と相の変化による影響を熱ひずみ、変態ひずみなどとして考慮して示す。

このとき、全ひずみ速度としては

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} + \dot{\varepsilon}_{ij}^T + \dot{\varepsilon}_{ij}^m, \quad (3.64)$$

を考える。ここで、既に示した粘塑性ひずみ $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ 、熱ひずみ $\dot{\varepsilon}_{ij}^T$ 、変態ひずみ $\dot{\varepsilon}_{ij}^m$ を表す式(3.7)、(3.18)、(3.19)を代入すると、次の関係が得られる。

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} s_{ij} + \alpha \dot{T} \delta_{ij} + \sum_I \beta_I \dot{\xi}_I \delta_{ij}. \quad (3.65)$$

さらに、これを偏差応力 s_{ij} について解くと

$$s_{ij} = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \alpha \dot{T} \delta_{ij} - \sum_I \beta_I \dot{\xi}_I \delta_{ij} \right), \quad (3.66)$$

という関係が得られる。

ここで、ポテンシャル関数

$$\dot{\Phi} = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{\Gamma} \sigma_{ji} n_j v_i d\Gamma - \int_V \rho b_i v_i dV, \quad (3.67)$$

を考える。このとき、解を与える速度 v_i とこれに対応するひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 、および可容速度 $v_i + \delta v_i$ と可容ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij} + \delta \dot{\varepsilon}_{ij}$ との間では、それぞれのポテンシャル関数において次の関係が常に成立する。

$$\dot{\Phi}(\dot{\varepsilon}_{ij} + \delta \dot{\varepsilon}_{ij}) - \dot{\Phi}(\dot{\varepsilon}_{ij}) \geq 0. \quad (3.68)$$

これは、可容速度 v_i の中でポテンシャル関数 $\dot{\Phi}$ を最小にするものが、境界値問題の解であることを示す最小ポテンシャルエネルギーの原理 (principle of minimum potential energy) である。しかし、塑性変形などで観察される非圧縮の材料挙動は、場合によってはこの原理で求めることが困難であることがある。このような場合には、あらたな付帯条件を考えることによって関数 $\dot{\Phi}$ から非圧縮性の条件をはずし、その上で実際の数値解析が行われている [139]。それらの方法のうち、ここでは Lagrange 乗数法と penalty 法について示す。

先のポテンシャル関数 $\dot{\Phi}$ において、偏差応力 s_{ij} を考えると

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \int_V (s_{ij} + \sigma_m \delta_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{\Gamma} \sigma_{ji} n_j v_i d\Gamma - \int_V \rho b_i v_i dV \\ &= \int_V s_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{\Gamma} \sigma_{ji} n_j v_i d\Gamma - \int_V \rho b_i v_i dV + \int_V \sigma_m \dot{\varepsilon}_{ii} dV, \end{aligned} \quad (3.69)$$

となる。これに対して、Lagrange 乗数 λ を用いて関数 $\dot{\Phi}$ から非圧縮性の条件を外した関数

$$\dot{\Phi} = \int_V s_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{\Gamma} \sigma_{ji} n_j v_i d\Gamma - \int_V \rho b_i v_i dV - \int_V \lambda \dot{\varepsilon}_{ii} dV, \quad (3.70)$$

において、この停留条件を速度 v_i と乗数 λ の変分によって求めた解は、式(3.69)で示される関数 $\dot{\Phi}$ の停留条件と同様のものとなる。このとき、Lagrange 乗数 λ は静水圧 $p (= -\sigma_m)$ に一致し、速度 v_i は境界値問題の解となる。この方法を Lagrange 乗数法という。

ここで、ポテンシャル関数 $\dot{\Phi}$ およびその変分形を考えると、それぞれ

$$\dot{\Phi} = \int_V \{\dot{\varepsilon}\}^T \{s\} dV - \int_{\Gamma} \{v\}^T \{t\} d\Gamma - \int_V \rho \{v\}^T \{b\} dV - \int_V \lambda \{\dot{\varepsilon}\}^T \{A\} dV, \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \int_V \{\delta \dot{\varepsilon}\}^T \{s\} dV - \int_{\Gamma} \{\delta v\}^T \{t\} d\Gamma - \int_V \rho \{\delta v\}^T \{b\} dV - \int_V \lambda \{\delta \dot{\varepsilon}\}^T \{A\} dV \\ - \int_V \delta \lambda \{\dot{\varepsilon}\}^T \{A\} dV = 0, \end{aligned} \quad (3.72)$$

となる。これと式(3.65)、(3.66)の関係を考慮すると、有限個の微小要素 V_e からなる領域 V に対する仮想仕事の原理の式は

$$\begin{aligned} \{\delta v\}^T \sum_V \left\{ \int_{V_e} 2\mu [B]^T [C] \left(\{\dot{\varepsilon}\} - \{\alpha\} \dot{T} - \sum_I \{\beta_I\} \dot{\xi}_I \right) dV - \int_{\Gamma_e} [N]^T \{t\} d\Gamma - \int_{V_e} [N]^T \{\rho b\} dV \right. \\ \left. - \int_{V_e} \lambda [B]^T \{A\}^T [N] \{\lambda\} dV \right\} - \{\delta \lambda\}^T \sum_V \left(\int_{V_e} [N]^T \{A\}^T \{\dot{\varepsilon}\} dV \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.73)$$

となる。これが任意の仮想変位速度 $\{\delta v\}$ 、Lagrange 乗数 $\{\delta \lambda\}$ に対して成立するとき、次のマトリックス式が得られる。

$$\sum_V \left\{ \int_{V_e} 2\mu [B]^T [C] \left(\{\dot{\varepsilon}\} - \{\alpha\} \dot{T} - \sum_I \{\beta_I\} \dot{\xi}_I \right) dV - \int_{\Gamma_e} [N]^T \{\bar{t}\} d\Gamma - \int_{V_e} [N]^T \{\rho b\} dV - \int_{V_e} [B]^T \{A\}^T [N] \{\lambda\} dV \right\} = 0, \quad (3.74)$$

$$\sum_V \int_{V_e} [N]^T \{A\}^T \{\dot{\varepsilon}\} dV = 0. \quad (3.75)$$

ここで、これらを単純にマトリックス表示をすると

$$\begin{bmatrix} [D] & [L] \\ [A] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (3.76)$$

となる。ただし、

$$[D] = \sum_V \int_{V_e} 2\mu [B]^T [C] [B] dV \quad \text{with} \quad [C] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{sym.}, \quad (3.77)$$

$$[L] = \sum_V \int_{V_e} [B]^T \{A\} [N] dV \quad \text{with} \quad [A] = \{A\} \{A\}^T \quad \text{and} \quad \{A\} = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \quad (3.78)$$

および

$$\{f\} = \{f^f\} + \{f^b\} + \{f^T\} + \{f^m\}, \quad (3.79)$$

$$\{f^f\} = \sum_V \int_{\Gamma_e} [N]^T \{\bar{t}\} d\Gamma, \quad (3.80)$$

$$\{f^b\} = \sum_V \int_{V_e} \rho [N]^T \{b\} dV, \quad (3.81)$$

$$\{f^T\} = \sum_V \int_{V_e} 2\mu [B]^T [C] \{\alpha\} \dot{T} dV, \quad (3.82)$$

$$\{f^m\} = \sum_V \int_{V_e} 2\mu [B]^T [C] \sum_I \{\beta_I\} \dot{\xi}_I dV, \quad (3.83)$$

である。しかし、この式 (3.76) は係数マトリックスの対角項に 0 を含む特異なものであって、これを用いて解析するには、通常さらに何らかの考察を加える場合が多い。

一方、ポテンシャル関数 ϕ の体積ひずみ ε_{ii} に関する付帯条件の扱い方として、比較的大きな数値 $\bar{\lambda}$ をペナルティとして考える penalty 法がある。このときのポテンシャル関

数 ϕ は、剛塑性解析などでは体積ひずみが $\varepsilon_{ii} = 0$ を満足しない場合には、正解の場合に対して相対的に大きくなるように次式で与えられる。

$$\phi = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{\Gamma} \sigma_{ji} n_j v_i d\Gamma - \int_V \rho b_i v_i dV + \frac{1}{2} \bar{\lambda} \int_V (\dot{\varepsilon}_{ii})^2 dV. \quad (3.84)$$

ここで、最終項がポテンシャル関数 ϕ の $\dot{\varepsilon}_{ii} \neq 0$ のときのペナルティとなる。

温度や相の変化が求められている場合には、式 (3.64) の熱ひずみ ε_{ij}^T や変態ひずみ ε_{ij}^m が与えられるので、この場合のポテンシャル関数 ϕ は

$$\phi = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{\Gamma} \sigma_{ji} n_j v_i d\Gamma - \int_V \rho b_i v_i dV + \frac{1}{2} \bar{\lambda} \int_V (\dot{\varepsilon}_{ii}^{vp})^2 dV, \quad (3.85)$$

となる。最終項が得られた解の粘塑性ひずみが $\dot{\varepsilon}_{ii}^{vp} = 0$ を満足させるためのペナルティである。したがって、式 (3.85) の変位速度 v_i に関する変分形

$$\int_V s_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{\Gamma} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_V \rho b_i \delta v_i dV + \bar{\lambda} \int_V \left(\dot{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha \dot{T} - 3 \sum_I \beta_I \dot{\xi}_I \right) \delta \dot{\varepsilon}_{ii} dV = 0, \quad (3.86)$$

を考慮することによって、体積粘塑性ひずみ ε_{ii}^{vp} が 0 に近い変位速度 v_i を得ることができる。式 (3.85)、(3.86) のそれぞれのマトリックス式

$$\dot{\phi} = \int_V \{\dot{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} dV - \int_{\Gamma} \{v\}^T \{\bar{t}\} d\Gamma - \int_V \{v\}^T \{\rho b\} dV + \frac{1}{2} \bar{\lambda} \int_V (\{A\}^T \{\dot{\varepsilon}^{vp}\})^2 dV, \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} & \int_V \{\delta \dot{\varepsilon}\}^T \{s\} dV - \int_{\Gamma} \{\delta v\}^T \{\bar{t}\} d\Gamma - \int_V \{\delta v\}^T \{\rho b\} dV \\ & + \bar{\lambda} \int_V \{\delta \dot{\varepsilon}\}^T \{A\} \{A\}^T \left(\{\dot{\varepsilon}\} - \{\alpha\} \dot{T} - \sum_I \{\beta_I\} \dot{\xi}_I \right) dV = 0, \end{aligned} \quad (3.88)$$

から、有限個の要素からなる領域 V に対する仮想仕事の原理式

$$\begin{aligned} & \{\delta v\}^T \sum_V \left\{ \int_{V_e} \frac{1}{2\mu} [B]^T [C] \left(\{\dot{\varepsilon}\} - \{\alpha\} \dot{T} - \sum_I \{\beta_I\} \dot{\xi}_I \right) dV - \int_{\Gamma_e} [N]^T \{\bar{t}\} d\Gamma \right. \\ & \left. - \int_{V_e} [N]^T \{\rho b\} dV + \bar{\lambda} \int_{V_e} [B]^T \{A\} \{A\}^T \left(\{\dot{\varepsilon}\} - \{\alpha\} \dot{T} - \sum_I \{\beta_I\} \dot{\xi}_I \right) dV \right\} = 0, \end{aligned} \quad (3.89)$$

が得られるので、結果として次の関係式が得られる。

$$([\hat{D}] - \bar{\lambda} [\hat{E}]) \{v\} = \{f\}. \quad (3.90)$$

ただし,

$$[\hat{D}] = \sum_V \int_{V_e} 2\mu [B]^T [C] [B] dV, \quad (3.91)$$

$$[\hat{E}] = \sum_V \int_{V_e} [B]^T \{A\} \{A\}^T [B] dV, \quad (3.92)$$

であって

$$\{f\} = \{f^t\} + \{f^b\} + \{f^T\} + \{f^m\}, \quad (3.93)$$

$$\{f^t\} = \sum_V \int_{V_e} [N]^T \{t\} d\Gamma, \quad (3.94)$$

$$\{f^b\} = \sum_V \int_{V_e} [N]^T \{\rho b\} dV, \quad (3.95)$$

$$\{f^T\} = \sum_V \int_{V_e} \left(2\mu [B]^T [C] - \bar{\lambda} [B]^T \{A\} \{A\}^T \right) \{\alpha\} \dot{T} dV, \quad (3.96)$$

$$\{f^m\} = \sum_V \int_{V_e} \left(2\mu [B]^T [C] - \bar{\lambda} [B]^T \{A\} \{A\}^T \right) \sum_I \{\beta_I\} \dot{\xi}_I dV, \quad (3.97)$$

である.

3.3.6 有限要素法による連成解析

本節のここまでの結果を用いて、温度と応力/ひずみ、組織の連成効果を考慮した数値解析を行うために、計算手順の基本的構成についてここで示す。Fig.1.1 に示したように、解析は大きく温度、応力/ひずみ、組織の3つに分けて考えることができる。解法としては1つの関係式、例えば次に示すマトリックス式

$$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v\} \\ \{\dot{T}\} \\ \{\dot{\xi}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \end{Bmatrix}, \quad (3.98)$$

を解くことでこれら3つの問題に対する解が導出できることが理想であるが、剛性マトリックス $[K]$ が特異であったり式 (3.98) 自体が非線形となる場合が多く、これを解くための学術的基礎が確立されていない現時点での解析は非常に困難であるため、本論文では問題をこれら3つに分けて考えている。さて、これら3つの解析方法の手順であるが、基本的には Fig.1.1 に示す関係を表現可能な形式であれば良いのであるが、本論文ではまず Fig.3.5 のように考えることとする。ここでは、まず温度解析の結果をもとに系内の組織の状態を

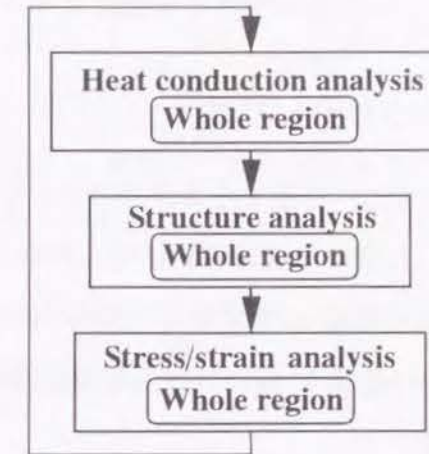


Fig. 3.5. Flow chart for calculations.

算出し、次にそれらの結果を用いて応力/ひずみ解析を行い、さらに各ステップにおいて所定の境界条件を満足する解が得られるまで計算が繰返される構成になっており、これらの計算で得られた値を全体で収束させることによって問題の解析が可能となる。なお、ここで示した解法は第5、6章のシミュレーションに適用されている。

3.4 境界の移動に関する考察

前節で既に示したように、弾粘塑性構成式を用いた有限要素法の定式化をしようとするときには、弾性ひずみを考慮するか無視するかで異なる方法が用いられる場合がある。通常は着目する現象に応じて適当にモデルを設定し、その上で解析を行って考察を進めるが、熔融状態の材料挙動を考慮しながら残留応力などを論じたい場合には、弾性ひずみの影響がある場合もない場合も考慮に入れる必要がある。そのような問題では、たとえ1つの系内で同一の構成関係を考えているときであっても、それぞれの場合について材料の変形挙動を解析する方法が考えられる。しかしその際には、まず両者の相互関係を与えておき、その上で問題の解析のための関係式の定式化を行う必要がある。そこでこの第3.4節では、ある領域の変形に関して弾性と粘塑性それぞれが支配的な範囲が存在し、しかもそれらの境界が移動する場合の有限要素法の定式化方法について、第2章で示した解析モデルとそ

れから得られた関係式をもとにして示すこととする。さらに、粘塑性が支配的な範囲に対して、外部からの物質の供給によって外部境界が移動する場合についても示すこととする。

3.4.1 境界の移動と静的つり合い状態

境界の移動に関する研究としては、移動する境界そのものを求める Stefan 問題に代表される移動境界問題があるが、ここでは境界の移動は何らかの方法によって与えられた場合について、境界に接する各領域の速度 v_i を求める方法について示す。

さて、速度 v'_i の境界 Γ を持つ領域 V 内における仕事量速度 \dot{W} に関しては、式 (2.22), (2.28) から次の関係が得られる。

$$\begin{aligned}\dot{W} &= \int_V \rho b_i v_i dV + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} v'_i n_j d\Gamma \\ &= \int_V \rho b_i v_i dV + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} v_i n_j d\Gamma + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} (v'_i - v_i) n_j d\Gamma \\ &= \int_V \left\{ \rho b_i v_i + \frac{\partial(\sigma_{ij} v_i)}{\partial x_j} \right\} dV + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} (v'_i - v_i) n_j d\Gamma \\ &= \int_V \left(\rho b_i v_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i \right) dV + \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} (v'_i - v_i) n_j d\Gamma. \quad (3.99)\end{aligned}$$

ここで、静的つり合い状態を仮定する場合には式 (3.39) が成立するので、式 (3.99) から次に示す仮想仕事の原理式が導出される。

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_V \rho b_i v_i dV - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} v_i n_j d\Gamma = 0. \quad (3.100)$$

このことは、境界が移動する問題に対しても、仮想仕事に代表される変分原理によって力学的な解析が可能であることを示している。

3.4.2 内部境界に関する考察

内部境界 $\bar{\Gamma}$ によって領域 V が分割されている場合では、まず外部境界の物質点と境界の速度が一致し、内部境界では一致しないという以下の境界条件の場合について考える。

$$v'_i \neq v_i \quad \text{on } \bar{\Gamma}, \quad (3.101)$$

$$v'_i = v_i \quad \text{on } \Gamma. \quad (3.102)$$

3.4. 境界の移動に関する考察

領域 V_s, V_l によって構成されている系について、まず仕事量速度 \dot{W} を考えると

$$\dot{W} = \int_{V_s} \rho b_i v_i dV + \int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \bar{t}_i v'_i d\Gamma + \int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \bar{t}_i v_i d\Gamma + \int_{V_l} \rho b_i v_i dV + \int_{\Gamma_l \cap \Gamma} \bar{t}_i v'_i d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \Gamma} \bar{t}_i v_i d\Gamma, \quad (3.103)$$

が得られ、この式 (3.103) において静的つり合い状態を考えると、解を与える条件としての仮想仕事の原理式が次式で与えられる。

$$\begin{aligned}& \int_{V_s} \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{V_s} \rho b_i \delta v_i dV - \int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma \\ & + \int_{V_l} \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{V_l} \rho b_i \delta v_i dV - \int_{\Gamma_l \cap \Gamma} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_l \cap \Gamma} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma = 0. \quad (3.104)\end{aligned}$$

ここで、 $V_s \cup V_l = V$ なる関係を考慮すると、式 (3.104) は

$$\begin{aligned}& \int_{V_s} \left\{ \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho b_i \delta v_i - \frac{\partial(\sigma_{ji} \delta v_i)}{\partial x_j} \right\} dV + \int_{V_l} \left\{ \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho b_i \delta v_i - \frac{\partial(\sigma_{ji} \delta v_i)}{\partial x_j} \right\} dV \\ & = \int_V \left\{ \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho b_i \delta v_i - \frac{\partial(\sigma_{ji} \delta v_i)}{\partial x_j} \right\} dV = 0, \quad (3.105)\end{aligned}$$

となる。一方、 $(\Gamma_s \cap \Gamma) \cup (\Gamma_l \cap \Gamma) = \Gamma$ であることから、式 (3.104) は

$$\begin{aligned}& \int_{V_s} \left(\sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho b_i \delta v_i \right) dV + \int_{V_l} \left(\sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho b_i \delta v_i \right) dV \\ & - \int_{(\Gamma_s \cap \Gamma) \cup (\Gamma_l \cap \Gamma)} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_l \cap \Gamma} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma \\ & = \int_V \left\{ \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho b_i \delta v_i - \frac{\partial(\sigma_{ji} \delta v_i)}{\partial x_j} \right\} dV - \left(\int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \Gamma} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma \right) = 0, \quad (3.106)\end{aligned}$$

となる。したがって、この式 (3.105) と (3.106) が同時に成立するための条件として次式が得られる。

$$\int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma = \int_{\bar{\Gamma}} (\sigma_{ji}^s n_j^s \delta v_i^s + \sigma_{ji}^l n_j^l \delta v_i^l) d\Gamma = 0. \quad (3.107)$$

ここで、仮に $\delta v_i^s = \delta v_i^l$ なる関係を考えると、式 (3.107) の局所形 $\sigma_{ji}^s n_j^s \delta v_i^s + \sigma_{ji}^l n_j^l \delta v_i^l = \delta v_i^s (\sigma_{ji}^s n_j^s + \sigma_{ji}^l n_j^l) = 0$ が得られ、これが任意の仮想速度 δv_i について成立することから Cauchy の原理 $\bar{t}_i^s = -\bar{t}_i^l$ が導かれる。つまり、式 (3.107) は境界 $\bar{\Gamma}$ でのつり合いの条件を表している。しかし、境界 $\bar{\Gamma}$ 上においては仮想速度 δv_i についても速度の跳躍条件の式 (2.51)

を満足していなければならない。したがってここでのつり合い条件は $\sigma_{ji}^s n_j^s \delta v_i^s + \sigma_{ji}^l n_j^l \delta v_i^l = 0$ で表されることとなる。

ここで、さらに各領域ごとについて考える。まず領域 V_s について、仮に境界 $\bar{\Gamma}$ で表面力 $\bar{t}_i = \sigma_{ji} n_j = 0$ であるとする。領域 V_s に関する仮想仕事の原理式が次式で与えられる。

$$\int_{V_s} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{V_s} \rho b_i \delta v_i dV - \int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma = 0. \quad (3.108)$$

しかし、式 (3.104) で表される関係では、領域 V_s , V_l の境界 $\bar{\Gamma}$ で表面力 $\bar{t}_i = \sigma_{ji} n_j \neq 0$ であって、さらに式 (3.107) の関係から領域 V_s 内に関する仮想仕事の原理式が次式によって与えられる。

$$\int_{V_s} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{V_s} \rho b_i \delta v_i dV - \int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_l \cap \Gamma} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma = 0. \quad (3.109)$$

これと同様の手順によって、領域 V_l についても次式が得られる。

$$\int_{V_l} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{V_l} \rho b_i \delta v_i dV - \int_{\Gamma_l \cap \Gamma} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_l \cap \Gamma} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma = 0. \quad (3.110)$$

したがって、それぞれの領域についてこれらの結果を用いた有限要素式による解析では、境界 $\bar{\Gamma}$ 上での各条件を満足しながら領域ごとの解が式 (3.109), (3.110) を共に満足している場合に、系全体としての条件である式 (3.104) を満足していることとなつて、1つの領域を分割した方法によっても問題の解析が可能となる。

3.4.3 溶融・凝固過程の有限要素式

ここでは、金属材料の溶融・凝固過程の数値解析を行うことを目的として、第3.4節で既示した関係式から有限要素式の導出過程を示す。Fig.3.6 には、ここでの解析モデルを示す。このとき、速度 v_i に関する境界条件は

$$v_i = v_i' \quad \text{on } \Gamma, \quad (3.111)$$

$$\rho_s v_i^s n_i^s - \rho_l v_i^l n_i^s = (\rho_s - \rho_l) v_i' n_i^s \quad \text{on } \bar{\Gamma}, \quad (3.112)$$

である。

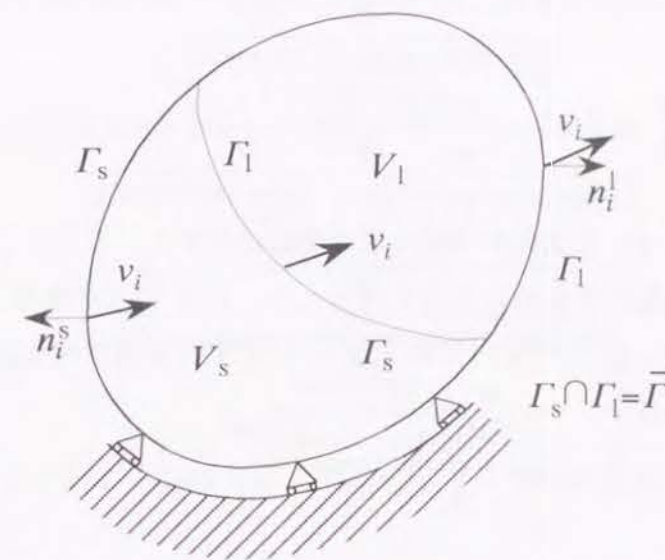


Fig. 3.6. Model for mechanical analysis of moving boundary problem.

まず、固相領域 V_s に関しては、ここでは速度形の関数として次式を考える。

$$\int_{V_s} \dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{V_s} \rho \dot{b}_i \delta v_i dV - \int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \dot{\sigma}_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \dot{\sigma}_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_l \cap \Gamma} \dot{\sigma}_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma = 0. \quad (3.113)$$

ここで、固相の変形に対する液相の変形抵抗は非常に小さいため、固相の変形を求める際に $\dot{\sigma}_{ij}^l = 0$ と考えると

$$\int_{V_s} \dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{V_s} \rho \dot{b}_i \delta v_i dV - \int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \dot{\sigma}_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \dot{\sigma}_{ji}^s n_j^s \delta v_i^s d\Gamma = 0, \quad (3.114)$$

となつて、固相領域 V_s の変形挙動の解析から液相に関する項が消え、固相領域 V_s の変形挙動の解析から液相に関する項を無視することができる。したがって、この結果をマトリックス表示をすると

$$\sum_{V_s} \left(\int_{V_s} \{\dot{\sigma}\}^T \{\delta \dot{\varepsilon}\} dV - \int_{\Gamma_s} \{\dot{t}\}^T \{\delta v\} d\Gamma - \int_{V_s} \{\rho \dot{b}\}^T \{\delta v\} dV \right) = 0, \quad (3.115)$$

となつて式 (3.49) と同形となり、これを用いた有限要素式は

$$[K]\{v\} = \{\dot{f}^t\} + \{\dot{f}^b\} + \{\dot{f}^T\} + \{\dot{f}^m\} + \{\dot{f}^{vp}\}, \quad (3.116)$$

となって、第3.3.4節の結果と一致する。

一方、液相領域 V_l に関しては、式(3.85)に対応して penalty 数 $\bar{\lambda}$ を導入した関数 $\dot{\phi}$ として

$$\dot{\phi} = \int_{V_l} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{V_l} \rho b_i v_i dV - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma} \sigma_{ji} n_j v_i d\Gamma - \int_{\Gamma} (\sigma_{ji}^l v_i^l - \sigma_{ji}^s v_i^s) n_j^l d\Gamma + \frac{1}{2} \bar{\lambda} \int_{V_l} (\dot{\varepsilon}_{ii}^{vp})^2 dV, \quad (3.117)$$

を考え、これを最小とする条件から解を求めることとする。とくにここでは、先に示したように固相の変形挙動が優先的に求められるため、境界 $\bar{\Gamma}$ での物質点の速度 v_i^l も既知となっている。したがって、式(3.117)の速度 v_i に対する連続性を仮定すると、この変分形が次のように得られる。

$$\int_{V_l} s_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_{V_l} \rho b_i \delta v_i dV + \bar{\lambda} \int_{V_l} \left(\dot{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha \dot{T} - 3 \sum_I \beta_I \dot{\xi}_I \right) \delta \dot{\varepsilon}_{ii} dV = 0. \quad (3.118)$$

これは式(3.86)と同形であって、この式(3.118)を用いた有限要素式は式(3.90)と同じく

$$[K]\{v\} = \{f^t\} + \{f^b\} + \{f^T\} + \{f^m\}, \quad (3.119)$$

となる。ただし、式(3.117)に示したように、液相の変形は内部境界 $\bar{\Gamma}$ で固相の速度 v_i^s に拘束されるため、固相の解析結果をもとに式(2.51)から液相の内部境界 $\bar{\Gamma}$ での速度 v_i^l を求め、その結果を液相領域の幾何学的境界条件として導入する必要がある。

本節のここまでの結果を用いて実際の溶融・凝固過程の解析を行うために、ここでは連成解析 [20] の手法をもとにした計算方法を示す。Fig.3.7 には計算の簡単な流れを示す。ここでは計算は大きく温度、組織(相)、応力/ひずみ解析に分けられており、そこでは温度解析の結果をもとに系内の組織の状態を算出し、それらの結果を用いて応力/ひずみ解析を行うことになって、さらに各ステップにおいて所定の境界条件を満足する解が得られるまで計算が繰返される構成になっている。しかし、本論文で示した境界条件の中で、式(2.51)については式(3.118)の導出過程で考慮されているが、式(2.56)については用いられなかった。このことは、系全体で力のつり合いが満足されない要因になるため、応力/ひずみ解析で固相、液相各領域の順に計算した後に、内部境界 $\bar{\Gamma}$ での値をもとに式(2.56)を満足するまでこれらを繰り返す必要がある。同様に、式(2.62)についても温度、組織解析で考慮し、さらに全体で解を収束させることによって問題の解析が可能となる。また、この手法は第7章の溶接過程の数値シミュレーションに適用例が示されており、その有用性が検討されている。

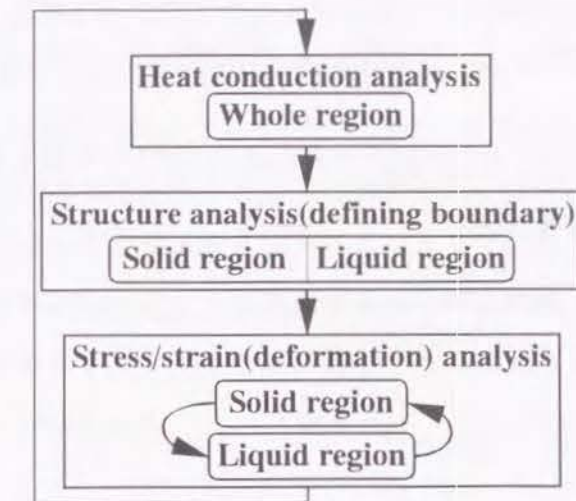


Fig. 3.7. Flow chart for calculations for moving boundary problem.

3.4.4 外部からの物質供給を考慮した定式化

ここでは、溶融過程において外部から新たな材料供給がある問題に対して、既示した考察方法に従った有限要素法の定式化について示す。ここでの解析モデルは、基本的に固相と液相が共存する問題であるため、Fig.3.6 に示すモデルで考えることとする。このとき、速度に関する境界条件は次のようになる。

$$v_i = v_i^l \quad \text{on } \Gamma_s \cap \Gamma, \quad (3.120)$$

$$\rho_s v_i^s n_i^s - \rho_l v_i^l n_i^s = (\rho_s - \rho_l) v_i^l n_i^s \quad \text{on } \bar{\Gamma}, \quad (3.121)$$

$$\rho(v_i^l - v_i) n_i = \zeta_i n_i \quad \text{on } \Gamma_l \cap \Gamma. \quad (3.122)$$

さて、Fig.2.4に示す解析モデルでの力学問題の有限要素法の定式化を行うため、全領域 V についての仕事量速度 \dot{W} を領域 V_s, V_l ごとに考えると

$$\dot{W} = \int_{V_s} \rho b_i v_i dV + \int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \bar{t}_i v_i^l d\Gamma + \int_{\Gamma_s \cap \Gamma} \bar{t}_i v_i d\Gamma + \int_{V_l} \rho b_i v_i dV + \int_{\Gamma_l \cap \Gamma} \bar{t}_i v_i^l d\Gamma + \int_{\Gamma_l \cap \Gamma} \bar{t}_i v_i d\Gamma, \quad (3.123)$$

となるが、ここで Cauchy の関係 $\bar{t}_i = \sigma_{ji} n_j$ と静的つり合い状態を表す条件 $\rho b_i + \partial \sigma_{ji} / \partial x_j = 0$ を考慮すると、この領域 V に対する仮想仕事の原理式が仮想速度 δv_i を用いて次式で与

えられる。

$$\int_{V_s} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_{V_l} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{V_s} \rho b_i \delta v_i dV - \int_{V_l} \rho b_i \delta v_i dV - \int_{\Gamma_s} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_l} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma = 0. \quad (3.124)$$

さらに、内部境界 $\bar{\Gamma}$ でのつり合い条件である式 (3.107) を考慮すると、前節と同様に領域 V_s , V_l ごとの仮想仕事の原理式が

$$\int_{V_s} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{V_s} \rho b_i \delta v_i dV - \int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma = 0, \quad (3.125)$$

$$\int_{V_l} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{V_l} \rho b_i \delta v_i dV - \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_l \cap \bar{\Gamma}} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_s \cap \bar{\Gamma}} \sigma_{ji} n_j \delta v_i d\Gamma = 0, \quad (3.126)$$

で与えられ、式 (3.125), 式 (3.126) を同時に満足する条件がここでの問題の解となる。しかも、これらはそれぞれ式 (3.109), 式 (3.110) に一致するものであって、これらを用いた有限要素式は前節の結果に一致する。

この結果、物質 (材料) 供給を伴う溶融・凝固過程の解析についても、連成解析 [20] の手法をもとにした計算方法を考えることができる。Fig.3.8 にはその計算の簡単な流れを示す。ここでも、計算は大きく温度、組織 (相)、応力/ひずみ解析に分けられているが、Fig.3.7に

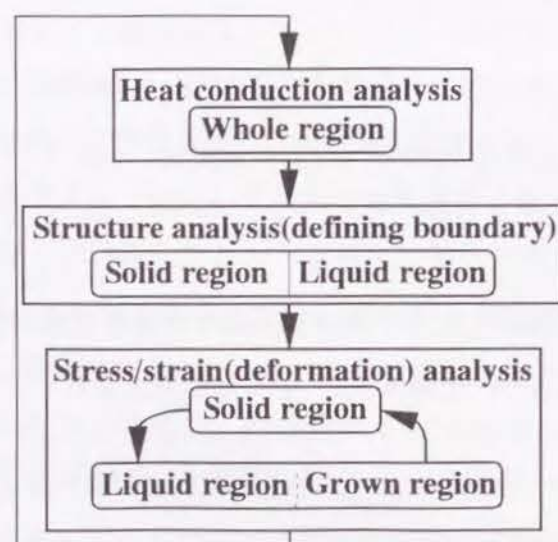


Fig. 3.8. Flow chart for calculations of growing boundary problem.

示す流れと異なるのは、物質供給を考慮した構成になっている点である。ここでの構成は、前節と同様に温度解析、組織解析の結果をもとに応力/ひずみ解析を行うことになっているが、液相の応力/ひずみ解析の前に外部供給の処理が挿入されている。これは、本章の結論の1つである固相の変形は液相に拘束されないという点から固相は Fig.3.7 と同じ段階に位置するのに対して、液相領域の境界条件としては物質供給の影響が考慮されているためである。さらに、所定の境界条件を満足する解が得られるまでこれらの計算が繰返され、さらに全体で解を収束させることによって問題の解析が可能となる。このことは、この手法を第8章の溶接過程の数値シミュレーションに適用することによって検証されている。

3.5 結 言

本章では、相変態を伴う過程の熱・力学的挙動の解析を行うことを目的として、まず材料の応力とひずみの関係について要点を示した。とくにここでは、本論文で対象としている主題が材料の溶融・凝固を伴う過程であることから、これに適用可能な構成関係の性質について示した。そして、Perzyna が示した超過応力理論にもとづく粘塑性モデルが、この過程を表現可能であることを示した。さらに、この Perzyna の粘塑性モデルを用いながら、相変態を考慮した熱弾粘塑性構成式を構成関係として取り上げ、これによるいくつかの有限要素法の定式化方法について示した。そして、この相変態を考慮した熱弾粘塑性構成式での定式化に加え、弾性成分を無視した剛粘塑性問題での定式化過程を示すと共に、溶融領域が変化していく問題の解析のための有限要素法の定式化を、第2章で示した境界が移動するモデルを用いて示した。さらに、これらの考察をさらに発展させることによって、外部から物質供給がある場合の定式化についても考えを示した。これらの結果から、固相内の相変態ばかりではなく、溶融・凝固などの固相と液相間の相変態を伴う材料の変形挙動について、有限要素法によって解析可能となった。

第4章

溶接過程における相変態

4.1 緒言

溶接過程においては、一般に材料が溶融するまで加熱されるために、相変態などの材料組織の変化が伴うのが普通である。溶接過程で生じる相変態としては、溶融・凝固に代表される液相・固相間の変態と固相内の変態に大きく分けられる。これらは、単に相が変化するというだけではなく、同時に熱力学的諸量や機械的性質の変化も伴うため、相変態を伴う過程の最終状態までの材料挙動は非常に複雑となる。このことは、溶接後の変形や残留応力、ひいては製品の性能に大きな影響をおよぼす現象であるため、詳細に材料挙動を論じながら溶接過程の評価を行おうとする場合には、観察される相変態を含めた個々の現象を詳細に検討した上で、さらにそれらを整理・統合して問題の解析を行う必要がある。

そこで第4章では、相変態を考慮した溶接過程の解析を行うことを目的として、この過程における金属材料の組織変化とその表現方法について示すこととする。ここでは、まず最初に溶接の本質である固相と液相の間での相変態について示し、とくに状態図とそこから得られるこの法則について簡単に説明することとする。さらに、金属材料の代表的相変態の1つである共析拡散変態について、熱力学的考察を出発点として定式化を行った組織履歴、温度、応力に依存した変態速度式を導出する。それに加え、この定式化の結果の妥当性を検討するために、鉄系-炭素系材料の代表的共析拡散変態であるパーライト変態とその逆変態であるオーステナイト逆変態について、ここでの定式化の結果を用いて恒温変態線図を算出するとともに、これを実験の変態曲線と比較して定式化の結果の検証を行う。

4.2 溶接と相変態

この第4.2節では、金属材料の溶接過程で観察される相変態の中で、溶融、凝固などの固相・液相間の相変態について、変態過程の各相の体積分率の算出方法に関する簡単な説明を示す。さらに、固相内での材料組織の変化についても概察することとする。

4.2.1 溶融・凝固

材料を局部的に溶融させて複数の部材を接合するため、必然的に溶融・凝固現象は溶接過程の本質的な現象である。金属材料を含めた物質の溶融・凝固現象に関する研究は、力学的にばかりではなく金属学的、ある場合については物理学、化学、数学までおよぶ広範囲な知識と観察力を必要とする主題であるが、溶融・凝固現象を論じる場合にこれらの成果をすべて網羅するのは困難である一方で、その中で重要な最低限の挙動を表現可能な方法を用いることである程度考察が可能である。その方法の中で、とくに種々の工学過程で材料として用いられる金属材料の合金に関しては、溶融・凝固などの組織変化を簡便に説明する方法として状態図を用いたこの法則が多くの場合で利用される。状態図とは、複数の元素のからなる合金について、それぞれの元素の分率と各温度での組織を詳細に調べた結果を連続的に表示したものであって、鉄-炭素系の状態図などはFig.4.1に示される形態をとる。しかも、これらの各点の組織は静的な状態から得られたものであるにもかかわらず、各相間の変態の速度依存性がきわめて小さい場合や無視できる場合については、この状態図を幾何学的にモデル化した方法で相変態を表現可能なものである。そのようなモデル化の代表的な方法の1つとして、てこの法則 (lever rule) が挙げられる。この法則は、例えばFig.4.2に模式的に示される2相合金の状態図において、各相の分率 ξ_s , ξ_l をその時点の温度 T での固相線 T_s と液相線 T_l までの水平距離 \bar{x}_s , \bar{x}_l の比で表したものである。

さらに本論文では、このてこの法則を簡潔に表現するために、固相線温度 T_s と液相線温度 T_l 、さらにそれぞれの点での分率に対する傾き m_s , m_l を用いて、その時点での温度 T から液相の体積分率 ξ_l を次式によって算出する方法を採用する [56]。

$$\xi_l = \frac{(T - T_s)/m_s}{(T_l - T)/m_l + (T - T_s)/m_s} \quad (4.1)$$

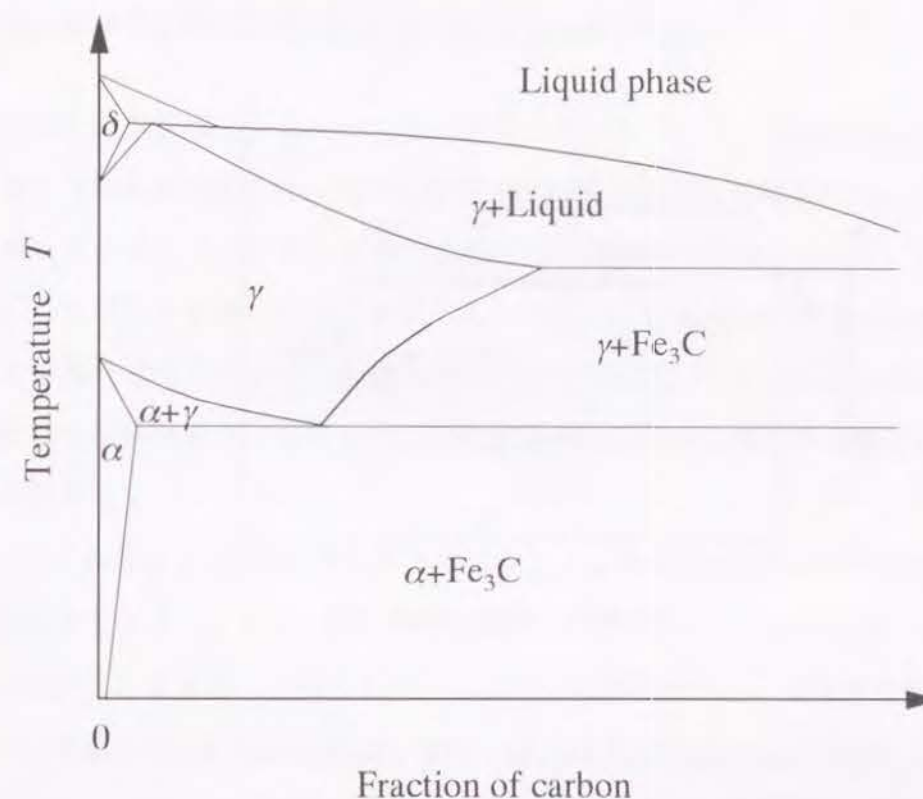


Fig. 4.1. Schematic of Fe-C phase diagram.

これによって、温度 T のみで溶融・凝固過程の各相の体積分率が算出することが可能となる。この方法は相界面における種々の複雑な現象を詳細に論じるにはおよばないが、本論文の論議はそこまでおよぶものではないために、この式 (4.1) を用いることとしている。

4.2.2 固相内の組織変化の影響

溶接過程の材料は常温の固体から溶融状態まで状態が変化するものであるが、この過程では固相内でも組織変化が生じることがあって、この組織変化の中には基本的に固相内の相変態も含まれる。また、対象となる材料によっては、常温から完全溶融までにも複数の相が存在し、しかも固相内においても特定の相が最も安定な状態をいくつか経由する場合がある。したがって、溶接過程の解析では、固相内の相変態についても何らかの検討を加

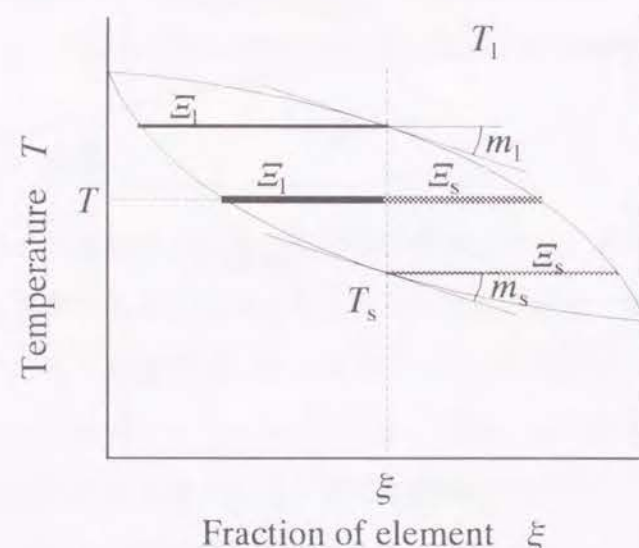


Fig. 4.2. Schematic of binary alloy diagram and lever rule.

えるべきものであると考えられる。Fig.4.1 に示すような鉄-炭素系の材料では、溶接には炭化物の析出の避ける目的などのために一般に低炭素鋼が用いられるが、ここでもフェライト、オーステナイト、パーライトなどの相が安定な状態を経由して溶接過程が進行する。これらの相間では基本的に機械的性質が異なるばかりでなく、さらに密度なども異なるために変態に起因するひずみも生じるものである。しかも、Fig.4.1 に示す状態図には表現されていないが、オーステナイトからの過冷によって生じるマルテンサイトやベイナイト、さらにはこれら相変態に加えて加熱による粒界析出や結晶粒成長などの組織変化も生じる場合があり、溶接製品に影響を与える因子としての固相内の組織変化は非常に複雑な問題である。

このような固相内の変態の影響を溶接過程の解析で考慮する場合には、状態図から観察されるような基本的な相変態などから考察を始め、さらに考察可能な組織変化に対象を広げて行くのが妥当であると思われる。したがって次節では、既に表示したこの法則に加えて、さらに固相内の相変態の中で基本的なものの1つである拡散形の相変態に着目し、こ

れを定式化した結果について示すこととする。

4.3 加熱冷却連続過程の拡散変態速度式

鉄鋼の代表的拡散変態であるパーライト変態とオーステナイト逆変態は、共に生成相の核生成に始まり結晶粒成長を伴いながら変態が進行するものと考えられている [140]。これらの相変態は温度や応力と密接な関係があるので、変態速度を論じる場合には当然温度や応力に依存した関係式を導くべきである。とくに、ここで重要な位置を占めるのが核生成速度と結晶粒成長速度であるが、変態速度はその時点における生成相の結晶粒の個数や大きさとも密接な関係があり、しかも結晶粒の個数や結晶粒径はその系の履歴に大きく影響されるものである。

したがってこの第4.3節では、熱力学的考察をもとに共析拡散変態の履歴依存性の関係式を導出することとする。とくに、変態が進行過程で逆行するような溶接過程に応用可能な関係式の必要性から、従来多く提案されているように変態開始からの時間を変数とする [141] のではなく、任意の時刻における温度、応力、そして結晶粒径分布に依存した関係式を提案する。さらに、これらの関係式からオーステナイト逆変態の恒温変態曲線である T-T-A (time-temperature-austenitization) 曲線 [142, 143] を実験結果との比較を行いながら算出することによって、関係式の妥当性を検証するとともに今後の数値解析で必要となる変数を決定する。またここでは、パーライト変態に関しては同様に恒温変態曲線 (T-T-T 曲線) によって各変数を決定し、変態速度式の妥当性についてさらに検討する。また、連成解析に応用することを目的として、T-T-A 曲線、T-T-T 曲線それぞれについての応力依存性についても検討を加える。

4.3.1 変態駆動力

相変態を起こすためには変化を生じさせるためのエネルギーが必要であるが、このエネルギーは駆動力 (driving force) と呼ばれている。一般に、駆動力は変態が起こる前後での自由エネルギーの差で与えられる。例えば、平衡温度を T_e とする相変態を考えると、温度 T で変態が起こる場合の駆動力は母相 (添字 m で表す) と生成相 (添字 f) の Gibbs の自

由エネルギー密度の差 $\Delta g = g_f - g_m$ に依存する。これを変態前後それぞれのエントロピー密度 η_m, η_f , エンタルピー密度 h_m, h_f を用いて表すと

$$\begin{aligned}\Delta g &= h_f - h_m - T(\eta_f - \eta_m) \\ &= \Delta h - T\Delta\eta,\end{aligned}\quad (4.2)$$

となる。ここで、 $\Delta h (= h_f - h_m)$ は変態の潜熱を表す。 T_e で平衡状態にある場合を考えると、定義より $\Delta g = 0$ とおくことができ、

$$\Delta\eta = \frac{\Delta h}{T_e}, \quad (4.3)$$

となる。式 (4.3) を式 (4.2) に代入することによって、温度変化による Gibbs の自由エネルギー密度の差 Δg_T が次式で表される。

$$\Delta g_T = \Delta h \left(1 - \frac{T}{T_e}\right). \quad (4.4)$$

ここで、平衡温度 T_e からの差 $T_e - T$ は過熱もしくは過冷の程度を表している。

4.3.2 核生成条件

核生成には駆動力が必要であるが、駆動力が発生しても実際にはすぐに核生成が起こるわけではない。生成相粒子が新たに形成された場合には、必然的に界面エネルギーおよび変態前後での体積変化に起因するひずみエネルギー差が発生し、これらが核生成の抑止力となる。したがって、母相中に新たに生成相の粒子が形成された場合を考えると、その時の全自由エネルギー差 ΔG は平衡温度 T_e からの差 ΔT に依存する自由エネルギー差 ΔG_T , 新たに生じる界面エネルギー ΔG_b , 密度差によって誘起されるひずみエネルギー ΔG_ρ の和として表される。

$$\Delta G = \Delta G_T + \Delta G_b + \Delta G_\rho. \quad (4.5)$$

ここで、生成相の粒子は便宜上母相に対して影響を与えないと仮定し、形成される粒子は半径 r を持つ球形であるとする場合には、変化した母相の質量 $(4/3)\rho_m r^3$ を用いることによって、平衡温度 T_e からの差 ΔT に依存する自由エネルギー差 ΔG_T は次式で表される。

$$\Delta G_T = \frac{4}{3}\pi\rho_m r^3 \cdot \Delta g_T. \quad (4.6)$$

4.3. 加熱冷却連続過程の拡散変態速度式

ここで、 ρ_m は母相の密度を表している。

同様に、新たに生じる界面エネルギー ΔG_b は、単位面積当たりの界面エネルギー q_b を用いて次式で定義される。

$$\Delta G_b = 4\pi r^2 \cdot q_b. \quad (4.7)$$

さらに、変態前後の体積差に起因するひずみエネルギーに関する考察を行う。生じた結晶粒の粒径を r とし、同質量の生成相の無応力状態での粒径を r_f とすると、次の関係が定義できる。

$$\frac{4}{3}\pi\rho_m r^3 = \frac{4}{3}\pi\rho_f r_f^3. \quad (4.8)$$

ただし、 ρ_f は生成相 f の無応力状態での密度を表している。ここで、生成相の粒子は母相に対して影響を与えないという本節の仮定の下では、密度差によって生成相に発生するひずみ ε^ρ は

$$\varepsilon^\rho = \frac{r - r_f}{r_f} = \frac{r}{r_f} - 1, \quad (4.9)$$

から求められる。式 (4.9) を式 (4.8) に代入すると次の関係を導出できる。

$$\frac{\rho_f}{\rho_m} = (1 + \varepsilon^\rho)^3. \quad (4.10)$$

ここで、密度差が小さく粒子生成によるひずみも比較的小さいとすると、式 (4.10) の右辺でひずみの2次以降の項を無視することができ、さらに各方向成分を考慮すると次式を導出することができる。

$$\varepsilon_{ij}^\rho = \frac{1}{3} \left(\frac{\rho_f}{\rho_m} - 1 \right) \delta_{ij}. \quad (4.11)$$

新たに生成した粒子は無ひずみ状態を基準とすることができるので、このときの単位体積当たりのひずみエネルギーは、生成相の弾性係数テンソル E_{ijkl} を用いて次式で表される。

$$u_\rho = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij}^\rho \varepsilon_{kl}^\rho = \frac{1}{18} \left(\frac{\rho_f}{\rho_m} - 1 \right)^2 E_{ijkl} \delta_{ij} \delta_{kl}. \quad (4.12)$$

したがって、この場合に生じるエネルギー差 ΔG_ρ は次のようになる。

$$\Delta G_\rho = \frac{4}{3}\pi u_\rho r^3 = \frac{2}{27}\pi \left(\frac{\rho_f}{\rho_m} - 1 \right)^2 E_{ijkl} \delta_{ij} \delta_{kl} r^3. \quad (4.13)$$

よって母相中に新たに生成相の粒子が形成された場合の自由エネルギー差 ΔG は、式 (4.6), (4.7), (4.13) を式 (4.5) に代入することによって次のように導かれる。

$$\Delta G = \frac{4}{3}\pi\rho_m \Delta g_T \cdot r^3 + 4\pi q_b \cdot r^2 + \frac{4}{3}\pi u_\rho \cdot r^3. \quad (4.14)$$

ここで、一般に Δg_T は負、 q_b , u_ρ は正であるので、式 (4.14) はある半径 r^* で最大値 ΔG^* を持つことになる。この r^* を臨界半径と呼び、発生した核が安定なものとなるためには粒子半径 r が r^* より大きく成長しなければならない。この臨界半径 r^* は式 (4.14) を微分して求めることができる。

$$r^* = -\frac{2q_b}{\rho_m \Delta g_T + u_\rho} \quad (4.15)$$

また、臨界半径 r^* の大きさの核生成に必要な臨界自由エネルギー差 ΔG^* は、式 (4.14), (4.15) から次のようになる。

$$\Delta G^* = \frac{16\pi q_b^3}{3(\rho_m \Delta g_T + u_\rho)^2} \quad (4.16)$$

過熱もしくは過冷された母相の原子配列には統計的なゆらぎが生じており、 N 個の原子からなる系の温度 T における半径 r^* の大きさの粒子の存在点の確率は、Boltzmann 分布則によると臨界自由エネルギー差 ΔG^* に依存するので、このとき ΔG^* は活性化エネルギーに相当する。したがって、核となり得る粒子の個数 N_r は

$$N_r = N \exp\left(-\frac{\Delta G^*}{k_b T}\right) \quad (4.17)$$

で示される。ここで k_b は Boltzmann 定数を表す。これらが r^* 以上に成長するためには1個以上の原子が母相から供給されなければならないが、この速度は母相原子の活性化エネルギー Q_d に依存するものと考えられる。この移動を二相間における原子の拡散と考えた場合、核生成速度 I は $\exp\left(-\frac{Q_d}{k_b T}\right)$ に比例する。すなわち、 C を任意の定数とすると

$$I = CN_r \exp\left(-\frac{Q_d}{k_b T}\right) = CN \exp\left(-\frac{\Delta G^*}{k_b T}\right) \exp\left(-\frac{Q_d}{k_b T}\right) = CN \exp\left(-\frac{\Delta G^* + Q_d}{k_b T}\right) \quad (4.18)$$

で表される [144]。

4.3.3 核生成への応力の影響

拡散変態速度が応力に依存することはよく知られているが、この現象を表現する方法としては実験結果から簡単な決定されたパラメーターが現在まで利用されている。しかし、種々の材料に対してパラメーターを決定することは通常困難であり、これに代わる方法を理論的考察から導出できれば、拡散変態現象を論じる上で大きな役割を果たすと考えられる。したがって、ここでは第 4.3.2 節の考察を発展させることによって応力の拡散変態へ

の影響を論じることとする。応力の影響としては、まず母相の密度変化、次に応力による自由エネルギーの効果に関して考察を行う。

微小体積 dV において変形が比較的小さい場合には、応力 σ_{ij} の働きによって生じる体積ひずみ ε_V はひずみの第1不変量に一致し ($\varepsilon_V = \varepsilon_{ii}$)、無応力状態の体積 dV と静水圧が存在する場合の体積 dV' の関係は次式で近似できる。

$$dV' = (1 + \varepsilon_V) dV \quad (4.19)$$

ただし、体積ひずみ ε_V と応力 σ_{ij} の関係は、体積変化は弾性変形にのみ依存し、無応力状態までの除荷過程で材料は線形弾性挙動を示すと仮定した場合、体積ひずみ ε_V は次式で表現することができる。

$$\varepsilon_V = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} \sigma_{ii} \quad (4.20)$$

さらに、質量保存則から変形前後の密度の関係を求めることができる。

$$\rho'_m = \frac{1}{1 + \varepsilon_V} \rho_m \quad (4.21)$$

この応力 σ_{ij} が存在する場合の密度 ρ'_m によって、式 (4.12), (4.13) を書き直すと次式が得られる。

$$u'_\rho = \frac{1}{18} \left(\frac{\rho_f}{\rho'_m} - 1 \right)^2 E_{ijkl} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (4.22)$$

$$\Delta G'_\rho = \frac{4}{3} \pi u'_\rho r^3 = \frac{2}{27} \pi \left(\frac{\rho_f}{\rho'_m} - 1 \right)^2 E_{ijkl} \delta_{ij} \delta_{kl} r^3 \quad (4.23)$$

式 (4.23) による $\Delta G'_\rho$ を式 (4.5) の ΔG_ρ として代入すると

$$\Delta G = \Delta G_T + \Delta G_b + \Delta G'_\rho = \frac{4}{3} \pi \rho_m \Delta g_T \cdot r^3 + 4\pi q_b \cdot r^2 + \frac{4}{3} \pi u'_\rho \cdot r^3 \quad (4.24)$$

となり、体積変化に起因する密度変化によって母相と生成相の密度差が縮小した場合には核生成が促進され、密度差が拡大する場合には核生成が抑制される現象が表現可能となる。

さらに、応力 σ_{ij} によって発生する物体内の自由エネルギー差 ΔG_σ の核生成への影響について考察する。非弾性材料挙動を伴う現象で応力 σ_{ij} に依存した自由エネルギーを厳密に定義するのは困難であるが、ここでは先ほどと同様に材料は無応力状態までの除荷過程で線形弾性挙動を示すと仮定した上で、応力 σ_{ij} による自由エネルギーを物体が無応力状態までの除荷過程で外部に対してなした仕事と定義する。このとき、単位体積当たりの

応力 σ_{ij} に依存するエネルギー u_σ は、母相 m の弾性コンプライアンス係数 C_{ijkl} を用いて次のように表すことができる。

$$u_\sigma = \frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} . \quad (4.25)$$

これは、生成相粒子の発生により開放される性質のものであり、応力 σ_{ij} が存在する場合には核生成が促進されることを意味するものである。この影響を第4.3.2節の関係式において考慮するために、式(4.5)を次のように置き換える。

$$\Delta G = \Delta G_T + \Delta G_b + \Delta G'_p + \Delta G_\sigma , \quad (4.26)$$

$$\Delta G_\sigma = -\frac{4}{3} \pi u_\sigma r^3 . \quad (4.27)$$

この結果から、第4.3.2節と同様に応力に依存した核生成条件が導出可能となる。

4.3.4 結晶粒成長速度

結晶粒成長速度は一般に過熱度が高いほど大きくなる。ここで、変態前後で濃度が変化せず、結晶粒成長速度は原子の移動に起因し、成長速度は温度にのみ依存するとすると考えるときには、結晶粒成長速度 v_r は次式で表すことができる。

$$v_r = v_0 \exp \left(-\frac{Q_v}{k_b T} \right) . \quad (4.28)$$

ここで、 Q_v は界面での活性化エネルギーであり、 v_0 は任意の定数である。

4.3.5 変態の速度式

変態速度を考える場合に重要な核生成とその後の成長の取扱い方法として、ここでは核生成場所は均一に分布している均質核生成であるとし、結晶粒は球状に成長するものとして考えることとする。とくに、生成相の各結晶粒は、ある時刻 $t = \tau$ で核生成した後、温度履歴 $T = T(t)$ を経て球状に成長するものとする。

いま、仮に全体の体積を1として、生成相同士が衝突してもそのまま成長し続けるものとする、時刻 $t = \tau$ で核生成した粒子の時刻 $t = t$ における半径 $r(t, \tau)$ は

$$r(t, \tau) = \int_\tau^t v_r(t) dt , \quad (4.29)$$

4.3. 加熱冷却連続過程の拡散変態速度式

で表される。時刻 $t = \tau$ における核生成速度を $I(\tau)$ とすると、時刻 t における生成相の総体積の変化量である拡張体積増分 dV_f は

$$dV_f = 4\pi v_r(t) \int_0^t I(\tau) r(t, \tau)^2 d\tau dt , \quad (4.30)$$

となる。ここで、母相の真の体積分率 ξ_f を用いると、式(4.30)で実際の体積分率に關係しているのは $1 - \xi_f$ と考えられるので、生成相の体積分率増分 $d\xi_f$ は

$$d\xi_f = (1 - \xi_f) dV_f , \quad (4.31)$$

で求めることができ、これを積分することによって任意の時刻における生成相の体積分率 ξ_f を求めることができる。

$$\xi_f = 1 - \exp(-V_f) , \quad (4.32)$$

$$V_f = 4\pi \int_0^t v_r(t) \int_0^t I(\tau) r(t, \tau)^2 d\tau dt . \quad (4.33)$$

さらに、一定温度下 ($T = \text{const.}$) で核生成速度 $I(t)$ が時間によらず一定 ($I(t) = I = \text{const.}$) である場合には、式(4.33)を数学的に解くことが可能であって

$$\xi_f = 1 - \exp \left(-\frac{\pi}{3} I v_r^3 t^4 \right) , \quad (4.34)$$

となる。これは恒温拡散変態の研究から得られた Johnson-Mehl の式 [25] であるが、変数として変態開始からの時間 t を含んでいるために、変態過程で変化が一時的に逆行した場合など、この時間 t の定義が困難な場合にこの式を用いることは適切ではないと考えられる。

そこで、任意の時刻 t において変態速度を定義するものとして結晶粒径分布 $n_f(r)$ を考慮することとする。ある時刻 τ ($0 \leq \tau \leq t$) で核生成したすべての生成相粒子の時刻 t における粒径 $r(t, \tau)$ は同一であると考え、この時刻 t における粒径 $r = r(t)$ が $0 \leq r \leq r_{\max}$ なる分布で与えられると考えた場合、式(4.30)は次式に書き直すことができる。

$$dV_f = 4\pi v_r(t) \int_0^{r_{\max}} n_f(r) r^2 dr dt , \quad (4.35)$$

これと式(4.31)から、任意の時間 t における変態速度 $d\xi_f$ が次式によって定義される。

$$d\xi_f = 4\pi (1 - \xi_f) v_r(t) \int_0^{r_{\max}} n_f(r) r(t)^2 dr dt , \quad (4.36)$$

この $n_f(t)$ は温度 T および応力 σ_{ij} の履歴によって異なる分布を示すため、式(4.36)は温度と応力の履歴に依存した変態速度を表すことができることになる。

4.3.6 母相粒子の縮退および消滅

生成相の結晶粒の成長は同時に母相の結晶粒の減少を意味するものであるが、溶接の熱影響部に見られる加熱過程のオーステナイト逆変態が完了しないままパーライト変態が起こるような現象を議論する際には、変態の逆行開始時における残留パーライト結晶粒の影響を無視することはできない。したがって、ここでは生成相の結晶粒成長時における母相の結晶粒縮退速度の関係式を導き出すものとする。

一般に、生成相と母相の体積分率増分 ξ_f , ξ_m には、次のような関係式をおくことができる。

$$d\xi_m = -d\xi_f. \quad (4.37)$$

ここで、結晶粒成長時と同様に、拡張体積の概念を用いて母相の結晶粒の縮退は球状に進行するものとし、さらに任意の時刻 $t = t$ における母相の結晶粒系分布 $n_m(r)$ を用いると、母相の拡張体積 V_m と拡張体積増分 dV_m は次のように表すことができる。

$$V_m = \frac{4\pi}{3} \int_0^{r_{\max}} n_m(r) r^3 dr, \quad (4.38)$$

$$dV_m = \frac{V_m}{\xi_m} d\xi_m. \quad (4.39)$$

母相中における結晶粒縮退速度は結晶粒径に関係なく一様であると考えられるので、その縮退速度 dr は次の式で近似できる。

$$dr = \frac{dV_m}{4\pi \int_0^{r_{\max}} n_m(r) r^2 dr}. \quad (4.40)$$

したがって、時刻 $t = 0$ に半径 r_0 の粒子が縮退を開始したときの時刻 $t = t$ における半径 $r(t)$ は次式で表される。

$$r(t) = r_0 + \int_0^t dr. \quad (4.41)$$

ここで、 $r(t) = 0$ となった時には粒子が消滅したものと考えることができる。

Table 4.1. Material parameter used in calculation.

	Pearlite	Austenite
ρ , kg/m ³	7760	7820
E , GPa	$200 - 1.8 \times 10^{-4} T^2$	$20 - 1.0 \times 10^{-4} T$

Table 4.2. Parameter defined in calculation.

	T-T-T	T-T-A
Δh , J/kg	2.1×10^4	2.1×10^4
T_e , °C	720	720
q_b , J/m ²	1.2×10^{-2}	2.7×10^{-3}
CN ,	1.0×10^{28}	6.0×10^{66}
v_0 , m/s	1.0	1.0
Q_e , J	1.8×10^{-19}	5.0×10^{-19}
Q_d , J	1.8×10^{-19}	5.0×10^{-19}

4.3.7 変態曲線の算出

ここでは、この第4.3節で示した拡散変態の速度式の評価を目的として、炭素鋼で観察される代表的な拡散変態であるパーライト変態とオーステナイト逆変態について、変態曲線の計算結果と実験によるものを比較し、これによって本節で示した関係式の妥当性を検討する。

まず最初に、計算に用いた物性値とパラメーターをそれぞれ Table 4.1 および 4.2 に示す。変数の決定方法としては、既に示した速度式を用いて算出した変態曲線を実験による曲線に近づけるように、各式で用いられる変数を決定する試行錯誤法を用いている。

このパラメーターを用いて計算したオーステナイトからパーライトへの恒温変態曲線 (T-T-T 曲線) を、算出結果を比較の対象とした変態曲線 [145] とともに Fig.4.3 に示す。比較の対象としたのは、炭素鋼 (C 0.79%, Mn 0.76%) に関する実験結果である。フェライト、パーライト、ベイナイト変態の進行機構は基本的に同じ拡散現象に依存しており、したがって本論文ではこれらを区別せずに同一の速度式で扱っているが、ここではパーライトノーズに代表される T-T-T 曲線の特徴である C 形の曲線がよく表されている。この Fig.4.3 に

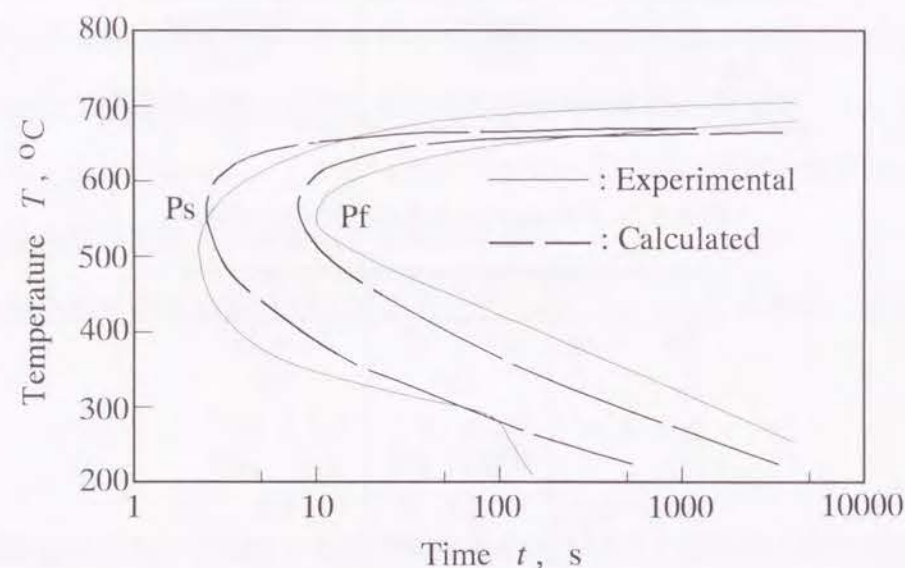
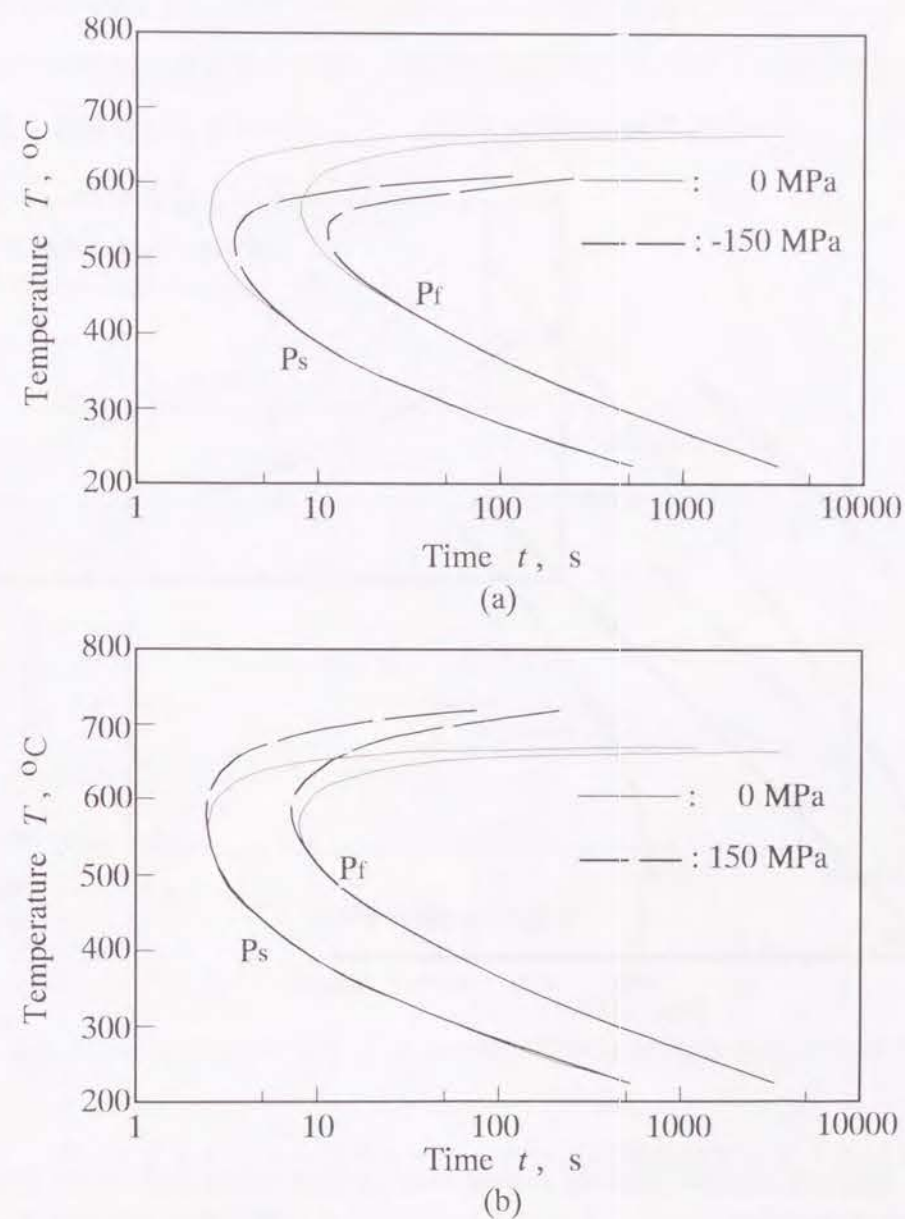


Fig. 4.3. Comparison of T-T-T diagrams of experience and calculation

示す変態曲線の計算結果では、過冷度が大きくなると式(4.6)に示す温度による駆動力が大きくなるが、この場合には同時にその時点の温度低下のために拡散現象が生じにくくなって、変態に要する時間が多くなっている。一方、過冷度が小さい場合は相対的に高温であるために拡散現象は生じやすくなるが、温度差による駆動力が小さいためにここでも変態に多くの時間を要する。結局、温度の駆動力と拡散現象が生じる割合が適当な場合に変態が最も速く進行し、パーライトノーズを形成する結果となる。この Fig.4.3 の結果から、本論文中で提案した変態速度式によって、このパーライト変態を表現することは可能であることがわかる。

また、Fig.4.3 で求めた同じ炭素鋼の T-T-T 曲線に関して、静水圧 σ_m が変態速度におよぼす影響として、この曲線が静水圧 σ_m によってどのように変化するかを計算し、その静水圧が存在する場合の結果を無応力状態の計算結果とともに Fig.4.4 に示す。Fig.4.4(a) は $\sigma_m = -150\text{MPa}$ 、Fig.4.4(b) は $\sigma_m = 150\text{MPa}$ が存在する場合の変態曲線である。いずれの場合も、静水圧は過冷度が小さい場合には大きな役割を果たすが、大きい場合にはあまり差が見られない結果となった。パーライトノーズは $\sigma_m = -150\text{MPa}$ のとき右下に移

Fig. 4.4. Stress effect for T-T-T diagram; (a) $\sigma_m = -150\text{MPa}$, (b) $\sigma_m = 150\text{MPa}$

動し、 $\sigma_m = 150\text{MPa}$ のときには左上へ移動している。ここに示すように、過去の研究報告 [146] にあるような、静水圧によるパーライトノーズの時間軸と温度軸方向への移動が、理論的考察にもとづく計算結果からも得られた。これらは、平衡温度が変化したような移動を示している。温度を基準としてこの現象を考えると、式(4.5)で示した相変態の駆動力

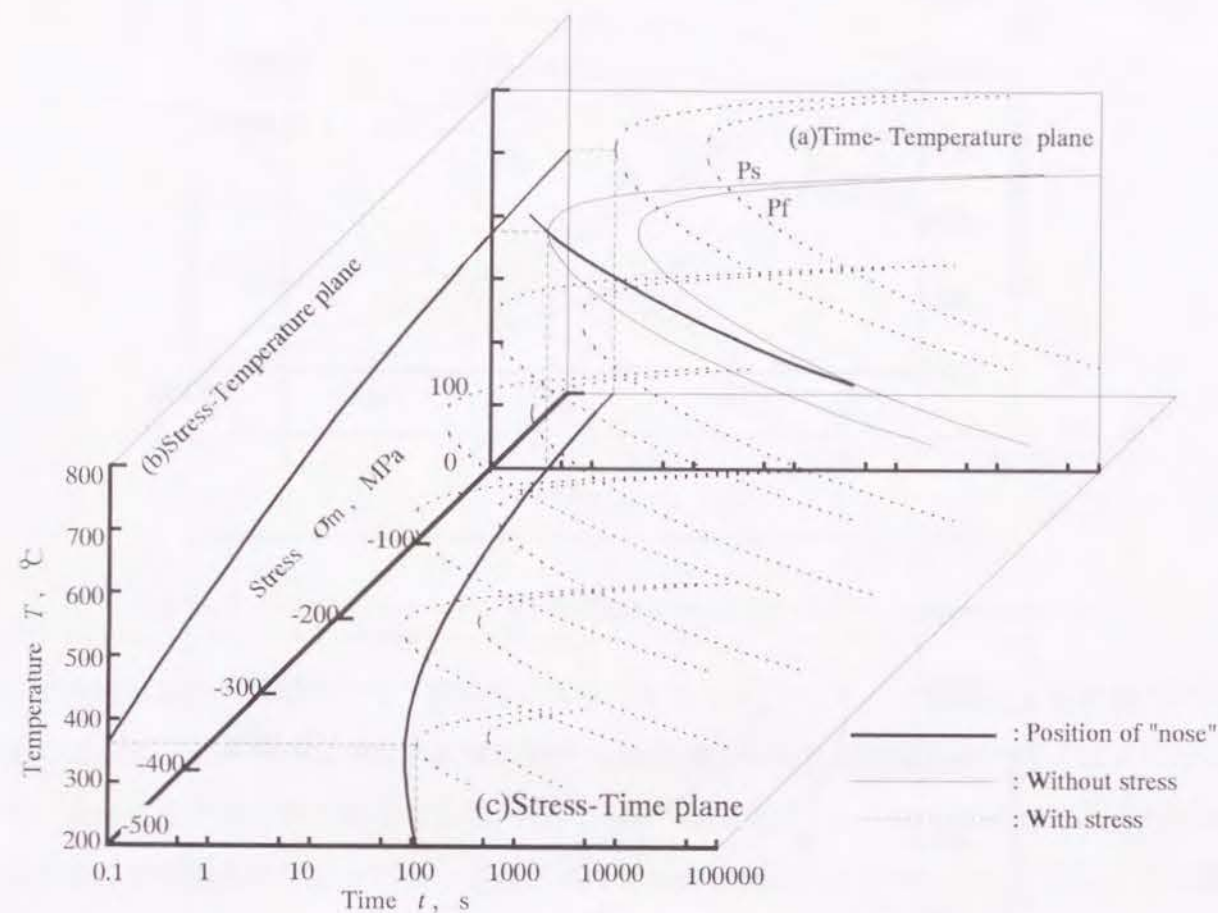


Fig. 4.5. Analysis for relationship among time, temperature and stress concerning with pearlite transformation.

に対して、応力の影響によって平衡温度が変化しと考えることができる。さらに、Fig.4.5には連成効果がT-T-T曲線におよぼす影響について解析した結果を示す。ここで、応力の影響を考えない場合の曲線はFig.4.5中の(a)面上のC曲線となる。静水圧によるパーライトノーズの位置の移動は、応力-温度、応力-時間、時間-温度面上に太線で示してある。応力と温度の関係でみると、Fig.4.5の(b)面上に示すように、ノーズの位置を示す温度は圧力の増加に伴って下がってくる。Fig.4.5の(c)面上に示すように、応力-時間面で

のパーライトノーズの位置で示される変態開始時間の遅れは、圧力とともに増加している。ここで示した曲線の変化については既に実験によって報告されており[146]、ここでの解析結果の傾向はこの実験結果と良く一致した傾向を示した。これは、ここで示した変態速度式が連成効果を表現可能なものであって、しかも相変態を伴う過程のシミュレーションに適用可能であることを示している。

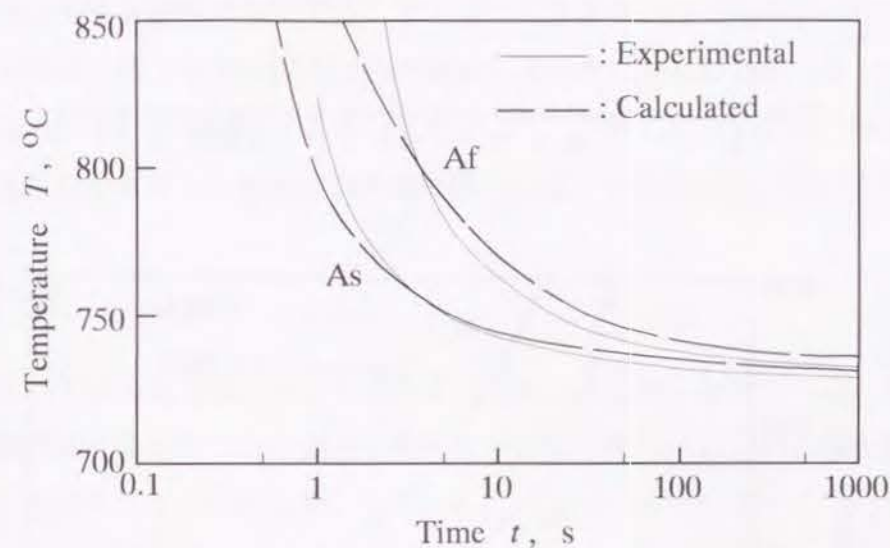


Fig. 4.6. Comparison of T-T-A diagrams of bibliography and calculation

同様に、パーライトからオーステナイトへの恒温変態曲線であるT-T-A曲線を、比較の対象とした共析鋼の変態曲線とともにFig.4.6に示す。このオーステナイト逆変態についてであるが、パーライト変態の研究と比べるとオーステナイト逆変態についての研究は著しく少なかった[147]-[153]。変態曲線であるT-T-A曲線に関する資料を十分集めることは困難であったが、ここでは文献[147]に記載されていた共析鋼のT-T-A曲線を比較の対象とした。その結果、比較的過熱度が少ない場合においては、変態はかなりの時間を経ないと開始せずに変態完了までにも多くの時間を要し、一方過熱度が大きい場合には短時間で変態が開始、終了するオーステナイト逆変態の特徴を、本論文で示した関係式で表現

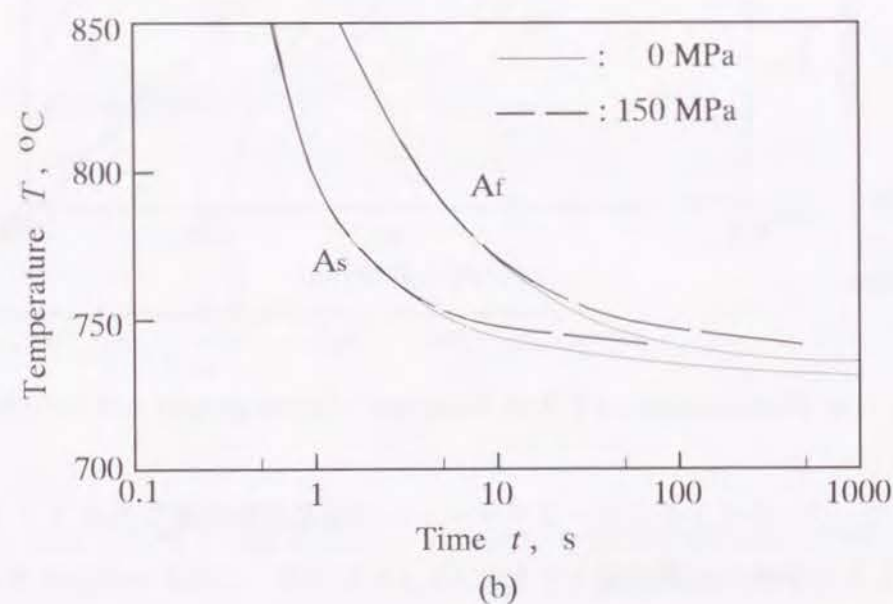
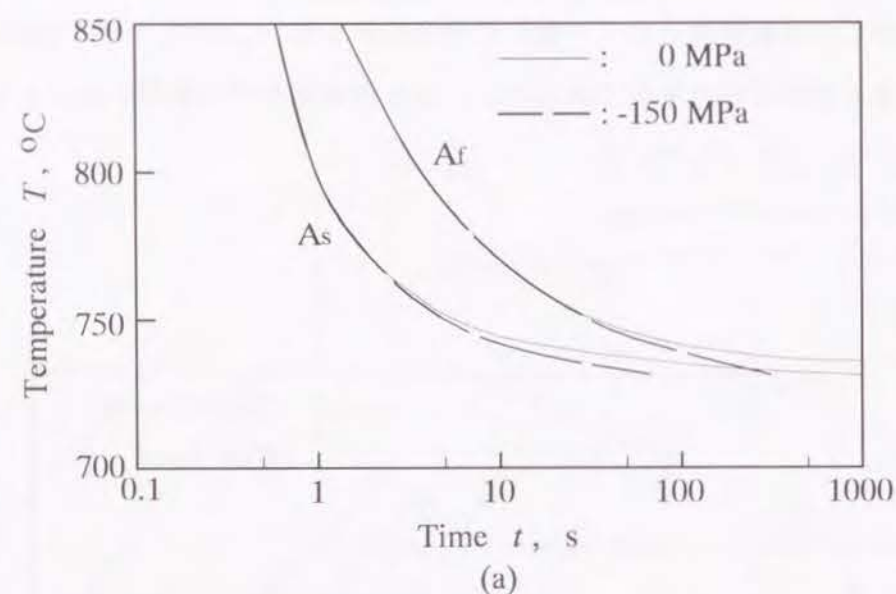


Fig. 4.7. Stress effect for T-T-A diagram; (a) $\sigma_m = -150 \text{ MPa}$, (b) $\sigma_m = 150 \text{ MPa}$

可能であることがわかる。このことから、本論文で提案した変態速度式によって、加熱過程のオーステナイト逆変態も表現することが可能であると考えられる。

さらに、静水圧が存在する場合の T-T-A 曲線についての計算結果を、無応力状態の共析鋼について求めた Fig.4.6 の結果とともに Fig.4.7 に示す。この結果からは、過熱度が比較

的小さい場合には応力による影響は大きい、過熱度が大きく平衡温度 T_e からの差 $T - T_e$ が大きい場合には応力による変態の駆動力への影響は小さいことが示されている。この結果からも、応力によって平衡温度が変化したような違いが生じている。これらの結果に示されるように、核生成、結晶粒成長を特徴とするオーステナイト逆変態は、加熱速度によって変態開始および終了温度が大きく影響を受け、とくに加熱速度が大きい場合にはこれを考慮する必要がある、さらに過熱度が比較的小さい場合には応力による影響が大きいことが解った。

以上の結果に示されるように、本節で示した相変態の関係式によって、加熱、冷却過程それぞれの拡散変態を表現可能である。とくに、変態速度の応力依存性についても表現可能である。さらに、応力依存性は理論的考察から導出されたものである、種々の材料の拡散変態にも容易に応用可能である。したがって、これらの関係式は、連成効果をはじめとする組織変化を考慮した数値解析を行う場合には、有用な手段となり得るものである。

4.4 結言

溶接過程に生じ得る相変態について概察すると共に、溶融・凝固にみられる液相と固相の間の相変態に関するいくつかの要点を最初に示した。また、固相内の相変態として拡散変態について着目し、その拡散変態のカイネティックスについて、熱・力学的な考え方から相変態の駆動力を定義するとともに、これによって加熱、冷却各過程の拡散変態の表現を行った。さらに、変態のカイネティックスとして粒径分布を考慮した上で、鉄系材料の代表的相変態であるパーライト変態、その逆変態であるオーステナイト逆変態について、このカイネティックスにもとづいた関係式の変数を導出した。ここで、各種変態曲線との比較によって妥当性を明らかにしたことによって、本章で示した変態速度式によって加熱、冷却各過程の拡散変態の表現が可能であることを示した。これに加えて、これらの結果を加熱・冷却連続過程に適用するために、母相と生成相の各粒径分布の間に成立する関係に関する考察を行った。

これによって、本章で示した拡散変態の関係式が加熱過程、冷却過程それぞれの相変態の様子を表現可能であることが示されたばかりでなく、逆変態を伴う連続的な繰返しの拡散変態過程の挙動も表現可能であることが示され、溶接のような加熱・冷却連続過程の相変態の挙動に関しても表現可能となった。

第5章

加熱・冷却過程の拡散変態を考慮した炭素鋼の溶接過程の解析

5.1 緒言

溶接は、第4章で述べたように組織の変化を伴う過程であるので、工学的な有用性を考えて実際の現象にもとづいてこの過程の解析を行うためには、この本質的現象である溶融・凝固や固相内の相変態などを考慮する必要がある。しかし実際には、液相、さらには高温状態にある範囲は全体に与える影響が少ないとして、ここで生じる現象を考慮せずに熱弾塑性構成式によって解析する理想化を行う場合 [135] や、冷却過程のある温度から常温までの熱ひずみなどを固有ひずみとして考慮した弾性体もしくは弾塑性体として解析する場合が多い [51]。その一方で、構成関係は実際の現象を適切かつ簡潔に表現できるものが望ましいという考えや、詳細に力学的挙動を論じるためには液相、固相の共存する系について統一的に記述する構成関係が必要となるため、相変態を考慮した熱弾粘塑性構成式による液相も表現可能な関係が提案され [56]、本論文中においても第3章でその考え方に則った構成関係を示した。とくに、構造用鋼材として広く使用されている炭素鋼に関しては、一連の溶接過程が終了するまでに固相内においても相変態が生じるために、変態前後の密度差に起因する体積ひずみや潜熱、機械的性質の差異が応力場、温度場に大きな影響を与えるものである。したがって、これらの相変態の影響を完全に無視することは、実際の現象に影響を与える因子を考慮しないことになり、溶接過程の材料挙動について詳細に検討しようとする場合には適切ではないと考えられる。そこで、固相内の相変態を考慮した溶接過程の解析方法の確立が必要となるが、現在までの報告では変態の開始温度と終了温度を

指定することによって相変態を記述したり、研究の進んでいる冷却過程のみ相変態速度式を考慮するもの [52]-[57] が大半であって、溶接のように加熱、冷却が連続する過程に適合した方法で相変態を表現したものは見受けられない。そこで本論文では、まず第4章で加熱、冷却連続過程に適合した拡散形変態の関係式を提示した後、いくつかの変態曲線との比較によってその妥当性を検討し、これが溶接過程の解析にも適したものであるという考えを示した。

さらにこの第5章では、溶接過程の材料挙動に固相内の相変態がおよぼす影響について考察を行うことを目的として、温度と応力、組織の連成解析を行った結果を示す。とくに、固相内における相変態を考慮した解析を行うにあたって、固相内の相変態では第2章で示したような各相間の明確な境界を定義することが困難な場合が多いため、まず第3.3.4節で示した複数の相からなる領域に対して混合則によって各物性値を定義することとした。その上で、組織の体積分率を考慮した熱伝導方程式、さらに応力/ひずみ解析の有限要素式の定式化について示すこととする。また、溶接モデルとしては溶接の中でも基本的な形式の1つである平板の溶接を考えることとし、とくにビードオンプレートによって溶接する過程としてこれを平面応力問題として扱うこととした。ただし溶融部の表現としては、液相の体積分率も先の組織の体積分率に含むものとし、単一領域から成る解析モデルとして扱うものとしている。材料としては、固相内でも相変態が生じる炭素鋼をモデルとして選択し、この固相内相変態の表現に関しては第4章で示した拡散形変態関係式を適用することとした。この方法によって、第4章の加熱、冷却連続過程における相変態の関係式の応用例を示すとともに、この計算結果から固相内相変態が溶接残留応力におよぼす影響についての考察を行うこととする。

5.2 解析の基礎理論

ここでは、本章で示す解析に用いる理論として、系を複数の組織の混合体から成立しているものとして考えた熱・力学的材料挙動を記述する方法を基本として論じることとする。

5.2.1 温度解析

熱伝導方程式としては、変形による熱発生と体積分率を用いて変態の潜熱を考慮した次式 [19]

$$\rho c \dot{T} - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} - \rho l_I \dot{\xi}_I - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \rho \dot{\gamma} = 0, \quad (5.1)$$

を用いて解析に必要な定式化を行うこととする。ここで、 c 、 l_I 、 k 、 $\dot{\gamma}$ はそれぞれ比熱、潜熱、熱伝導率、熱供給を表している。

まず解析対象を有限な要素に分割し、要素内の温度 T を形状関数マトリックス $[N]$ 、節点温度 $\{T\}$ を用いて

$$T = [N]\{T\}, \quad (5.2)$$

で表すものとする。ここで熱伝導の当方性を仮定し、 $[N]$ を重み関数として式 (5.1) にガラーキン法 [155] を適用すると

$$\begin{aligned} & \int_{V_e} [N]^T \left\{ \rho c \dot{T} - \{\sigma\}^T \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} - \rho l_I \dot{\xi}_I - k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \rho \dot{\gamma} \right\} dV \\ &= \int_{V_e} [N]^T \left(\rho c \dot{T} - \{\sigma\}^T \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} - \rho l_I \dot{\xi}_I - \rho \dot{\gamma} \right) dV \\ &+ \int_{V_e} k \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) dV + \int_{\Gamma} [N]^T \{q\} d\Gamma \\ &= \int_{V_e} [N]^T \left(\rho c \dot{T} - \{\sigma\}^T \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} - \rho l_I \dot{\xi}_I - \rho \dot{\gamma} \right) dV \\ &+ \int_{V_e} k \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \frac{\partial [N]}{\partial z} \right) \{T\} dV + \int_{\Gamma} [N]^T \{q\} d\Gamma = 0, \quad (5.3) \end{aligned}$$

となる。これを解析対象全体について重ね合わせることによって、次に示すマトリックス式が得られる。

$$[K]\{T\} + [\bar{C}]\{\dot{T}\} = \{Q_\sigma\} + \{Q_\xi\} + \{Q_\gamma\}, \quad (5.4)$$

ここで、各項はそれぞれ次式で表される。

$$[K] = \sum_V \int_{V_e} k \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \frac{\partial [N]}{\partial z} \right) \{T\} dV, \quad (5.5)$$

$$[\bar{C}] = \sum_V \int_{V_e} \rho c [N]^T [N] dV, \quad (5.6)$$

$$\{Q_\sigma\} = \sum_V \int_{V_e} [N]^T (\{\sigma\}^T \{\dot{\varepsilon}^{vp}\}) dV, \quad (5.7)$$

$$\{Q_\xi\} = \sum_V \int_{V_e} \rho l_I \xi_I [N]^T dV, \quad (5.8)$$

$$\{Q_\gamma\} = \sum_V \left(\int_{V_e} \rho \gamma [N]^T dV - \int_{\Gamma_e} [N]^T \{q\} d\Gamma \right). \quad (5.9)$$

5.2.2 組織解析

本章で解析対象とする構造用低炭素鋼 SM41 は、溶接に適するように溶接性と低温脆性を考慮した材料である [156] が、基本的に亜共析鋼であるため固相内の変態ではフェライト、パーライト、オーステナイト、マルテンサイト、ベイナイトなどの組織を考える必要がある。しかし、これらの内で本章では便宜上パーライトとオーステナイト間の変態のみを考え、これを次式 (4.36) で代表される第 4.3 章の定式化の結果で表現することとした。

$$d\xi_f = 4\pi(1 - \xi_f)v_f(t) \int_0^{r_{\max}} n_f(r)r(t)^2 dr dt. \quad (5.10)$$

固相と液相の変態については、この法則である式 (4.1) を適用することとした。

$$\xi_l = \frac{(T - T_s)/m_s}{(T_l - T)/m_l + (T - T_s)/m_s}. \quad (5.11)$$

5.2.3 応力/ひずみ解析

実際の現象が 3 次元である場合であっても、応力/ひずみ解析を 3 次元で行うと計算量が多くなる場合などでは、問題を 2 次元で近似することによって解析を容易にすることができる。溶接の応力解析でも、平板溶接などで対象の大きさに比べて厚さが小さい場合であって、しかも面外変形が小さい場合にはこれを平面応力問題と考えることができる。したがって、ここでは平板の溶接問題を計算することを目的として、平面応力問題の有限要素法の定式化について示す。

まず、構成関係として相変態を考慮した熱弾粘塑性を表す式 (3.16) を考え、ここで平面応力の条件として z 方向の応力成分をすべて 0 とおく場合には、

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad (5.12)$$

なる条件と式 (3.32) から、各ひずみ速度は

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\dot{\sigma}_x - \nu \dot{\sigma}_y}{E} + \frac{\sigma_x - \nu \sigma_y}{E^2} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \dot{T} + \sum_I \frac{\partial E}{\partial \xi_I} \dot{\xi}_I \right) + \alpha \dot{T} + \sum_I \beta_I \dot{\xi}_I + \frac{1}{2\mu} s_x, \quad (5.13)$$

$$\dot{\epsilon}_y = \frac{\dot{\sigma}_y - \nu \dot{\sigma}_x}{E} + \frac{\sigma_y - \nu \sigma_x}{E^2} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \dot{T} + \sum_I \frac{\partial E}{\partial \xi_I} \dot{\xi}_I \right) + \alpha \dot{T} + \sum_I \beta_I \dot{\xi}_I + \frac{1}{2\mu} s_y, \quad (5.14)$$

$$\dot{\epsilon}_z = -\frac{\nu(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y)}{E} - \frac{\nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E^2} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \dot{T} + \sum_I \frac{\partial E}{\partial \xi_I} \dot{\xi}_I \right) + \alpha \dot{T} + \sum_I \beta_I \dot{\xi}_I + \frac{1}{2\mu} s_z, \quad (5.15)$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \dot{\tau}_{xy} + \frac{1}{2\mu} s_z, \quad (5.16)$$

で表される。これを各応力速度について解くと

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_x = & \frac{E(\dot{\epsilon}_x + \nu \dot{\epsilon}_y)}{1 - \nu^2} - \frac{1}{E} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \dot{T} + \sum_I \frac{\partial E}{\partial \xi_I} \dot{\xi}_I \right) \sigma_x \\ & - \frac{E}{1 - \nu} \alpha \dot{T} + \frac{E}{1 - \nu} \sum_I \beta_I \dot{\xi}_I - \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{1}{2\mu} (s_x + \nu s_y), \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_y = & \frac{E(\dot{\epsilon}_y + \nu \dot{\epsilon}_x)}{1 - \nu^2} - \frac{1}{E} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \dot{T} + \sum_I \frac{\partial E}{\partial \xi_I} \dot{\xi}_I \right) \sigma_y \\ & - \frac{E}{1 - \nu} \alpha \dot{T} + \frac{E}{1 - \nu} \sum_I \beta_I \dot{\xi}_I - \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{1}{2\mu} (s_x + \nu s_y), \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\dot{\tau}_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\dot{\gamma}_{xy} - \frac{1}{2\mu} s_{xy} \right), \quad (5.19)$$

となる。ここで、式 (3.55) の定式化過程と同様の手順によって、平面応力の場合にも式 (3.55) と同形の次式が得られる。

$$[K]\{v\} = \{\dot{f}^t\} + \{\dot{f}^b\} + \{\dot{f}^T\} + \{\dot{f}^m\} + \{\dot{f}^{vp}\}. \quad (5.20)$$

ただし、式 (3.56)-(3.61) に対応する各項では次のようになる。

$$[D^e] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & & \text{sym.} \\ \nu & \nu & \\ 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

$$\{\dot{\epsilon}\} = \{\dot{\epsilon}_x \quad \dot{\epsilon}_y \quad \dot{\gamma}_{xy}\}^T, \quad (5.22)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T, \quad (5.23)$$

$$\{s\} = \{s_x \quad s_y \quad s_{xy}\}^T, \quad (5.24)$$

$$\{\alpha\} = \{\alpha \quad \alpha \quad 0\}^T, \quad (5.25)$$

$$\{\beta_I\} = \{\beta_I \quad \beta_I \quad 0\}^T, \quad (5.26)$$

5.3 計算と考察

ここでは、相変態を伴う溶接過程の温度と組織、応力の各分布の変化について、有限要素解析のための解析条件と本章で示した関係式を用いた計算結果を示す。

5.3.1 溶接モデルと解析条件

解析に用いる溶接方法としては種々の方法が考えられるが、ここでは Fig.5.1(a) に示す $200 \times 200 \times 5$ mm の平板中央部に母材に溶着金属を中央部 100mm に盛るビードオンプレートを採用した。このモデルに対して、溶接線に関する対称性から実際の計算は全体の半分を対象とし、ここで有限要素分割を Fig.5.1(b) のように要素数 596、節点数 328 で作成した。拘束は溶接線上でのみ考慮することとし、周辺部の拘束は考えていない (Fig.5.1(c))。溶接条件は、電極送り速度 5mm/s、入熱量は 800kJ/m とし、これを x 軸上の節点 ($x = 50 \sim 150$ mm) から移動熱源として与えた。これに要する溶接時間は 20s である。熱放出は表面において生じるが、ここでは要素の面積から熱伝達量 $\bar{h}(T - T_w)$ 、熱ふく射による熱放出量 $\bar{\epsilon}\bar{\kappa}(T^4 - T_w^4)$ を逆に入熱量 \bar{q} として与えることによって算出することとした。

次に材料であるが、溶接材としては炭素鋼を考え、この物性値については溶接用低炭素鋼 SM41 についての報告 [56] を参考とした。Table 5.1 にその値を示す。ただし、ここで添字 s, l は固相、液相を表し、さらに固相 s の中でもとくにパーライト、オーステナイトを表すために P, A をそれぞれ用いている。温度 T は $^{\circ}\text{C}$ である。また、熱伝導解析に関する条件としては、雰囲気温度 $T_w = 20^{\circ}\text{C}$ 、熱伝達率 $\bar{h} = 20\text{W/m}^2\text{K}$ 、熱ふく射率 $\bar{\epsilon} = 0.3$ なる値を適用した。ただし、 $\bar{\kappa}$ は Stefan-Boltzmann 定数を表す。

5.3.2 計算結果と考察

ここでは、本章でこれまで示した関係式と解析条件を用いて、炭素鋼の溶接過程の温度、組織および応力分布の変化の過程を計算した結果を示すこととする。

まず、Fig.5.2 には温度分布の変化の様子を示す。本解析で溶接棒は x 軸上を移動して解析対象に熱を供給するが、この過程の進行に伴って Fig.5.2(a)-(c) では鋭い最大値を持つ温度の位置が移動していく様子が示されている。また Fig.5.2(d) にみられるように、このときの溶接時間である 20s 以降では、入熱による鋭い最大値を持たない温度分布を保ちな

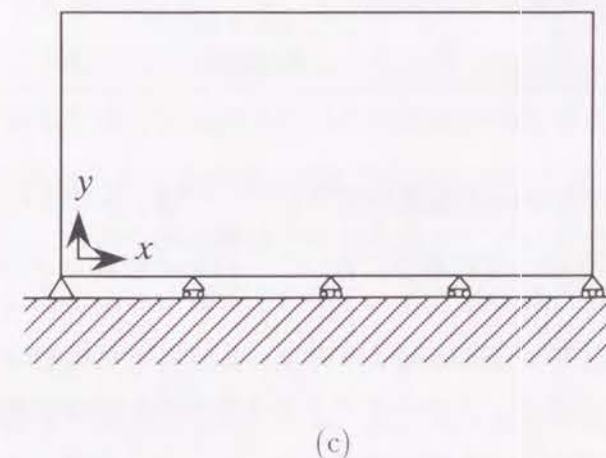
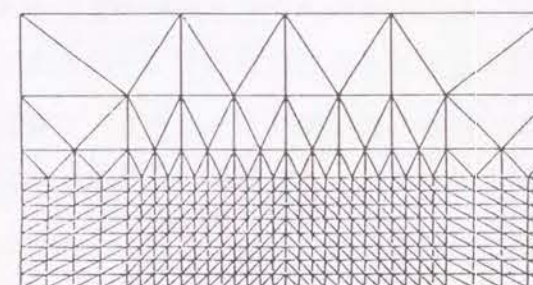
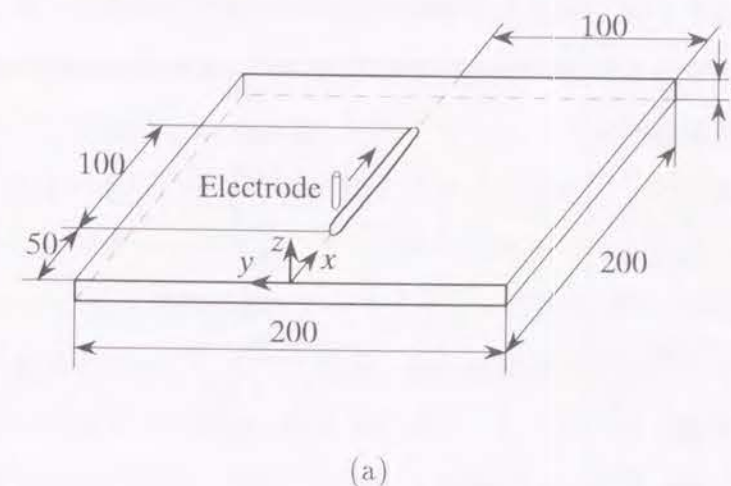


Fig. 5.1. Welding model(a), finite element mesh(b) and constraint(c).

Table 5.1. Material properties of SM41.

ρ , kg/m ³	7860
c_P , J/kg·°C	500
c_A , J/kg·°C	600
c_l , J/kg·°C	600
k_P , W/m·°C	40
k_A , W/m·°C	25
k_l , W/m·°C	25
l , J/kg	2.7×10^5
T_s , °C	1450
T_l , °C	1550
m_s , °C/%	4.833
m_l , °C/%	5.778
E_P , GPa	$200 - 0.00018T^2$
E_A , GPa	$20 - 0.0001T$
E_l , GPa	1
ν	0.35
$\bar{\mu}_P$, MPa·s	$2300 - 1.9T$
$\bar{\mu}_A$, MPa·s	$5270 - 8T + 0.0031T^2$
$\bar{\mu}_l$, MPa·s	5.0×10^{-3}
σ_y^P , MPa	$265 - 0.137T + 2.94 \times 10^{-4}T^2 + 1.27 \times 10^{-7}T^3$
σ_y^A , MPa	$31.4 - 0.02T$
σ_y^l , MPa	0
H_P' , GPa	$2.65 - 13.8T - 3 \times 10^{-2}T^2$
H_A' , GPa	0.1
H_l' , GPa	0
α_s , 1/°C	1.8×10^{-6}
β	0.022

から、その後は自然放冷で板全体の温度が低下していく様子が示されている。この Fig.5.2 で示されたような加熱・冷却の連続過程において、材料の組織がどのように変化しているかを以下に示す。

Fig.5.3 と 5.4 にはパーライト、オーステナイトそれぞれの組織の解析結果を示す。本解析で対象とした材料の常温における標準組織はパーライトとしているが、溶接の進行によ

る温度分布の変化に伴って、パーライトの体積分率が減少していく様子が Fig.5.3 では示されている。第4章で示したように、これは加熱によってパーライトからオーステナイトへの逆変態が生じているためであって、加熱過程でのパーライトとオーステナイトの間の連続的な相変態がここで観察されている。一方、オーステナイトの体積分率の変化を示した Fig.5.4 では、溶接の進行に伴って溶接線上でオーステナイトの体積分率が増加しており、加熱によるオーステナイト逆変態によってオーステナイトが生成している様子が示されている。また、Fig.5.4(e) の最終的なオーステナイトの分布では、残留オーステナイトがわずかに存在することが示されている。これは、他の溶接線上の部分に比べて溶接開始、終了部近辺は接している周辺部の範囲が相対的に広く、したがって主に熱伝導に起因する冷却速度が大きくなるためであると考えられる。本解析ではマルテンサイト変態を考慮していないが、仮にこの変態を考慮していたならば残留オーステナイトが存在している部分にマルテンサイトが生成することが考えられ、冷却速度と相変態、さらには溶接部の脆化など強度的な面が、複雑ながら非常に密接な関係をもことを示している。また開始部と終了部との比較で終了部の残留オーステナイトが開始部よりも多くなっているのは、開始部はその冷却過程で近傍が加熱過程にあるのに対して、全体が冷却過程にある終了部の方が冷却速度が速くなったためであると考えられる。第4章で示したパーライト変態の速度式を溶接過程の解析に適用することによって、同じ溶接線上の冷却速度の差異による組織の違いが表現可能であることを示している。また、本解析では液相の体積分率は、全体を通じて 10% 未満であった。

Fig.5.5 と 5.6 に溶接線方向の応力分布 σ_x 、溶接線直角方向の応力分布 σ_y の変化をそれぞれ示す。Fig.5.5 と 5.6 の (a), (b) では、溶接開始から溶接棒の進行方向の前方では大きな応力が発生しているのに対して、溶接棒のごく近辺では応力が低下している様子が示されている。さらに、溶接が終了した部分では引張応力が発生する過程も示されている。また、とくに Fig.5.2 で温度の最高温度が存在する部分においては、その値は σ_x , σ_y とともにほぼ 0 となっている。これは、溶接棒進行方向の前方においては、温度上昇に起因する膨張が周辺部に拘束されるために圧縮応力が生じ、また溶接棒近傍では溶融に達するような高温において生じる粘塑性ひずみによって拘束が緩和されて圧縮応力が低下したものである。さらに、溶接が終了した部分においては、温度低下による収縮が周辺部に拘束されて引張り応力が発生したものと考えられる。一方、Fig.5.5 と 5.6(b)-(d) の応力分布の変化を

みると、溶接が終了した後に引張り応力が発生しつつある部分において、応力が圧縮に転じていく現象がみられた。これは、Fig.5.3-5.4 の計算結果とも比較してみると、オーステナイトが減少してパーライト変態が生じる部分と一致している。したがって、これは相変態によって両相間の密度差に起因する体積膨張が生じ、新たに圧縮応力が発生して応力分布が変化したものと考えられる。これらの組織解析を含めた計算結果では、組織の変化が材料の力学的挙動に大きな影響を与える過程がよく示されている。また本解析では、溶接終了から約 700s で最高温度が 60 °C 未満となっており、解析対象の最高温度と最低温度の差が 1 °C 未満であった。この時点では相変態もほとんど進行せず、熱応力もほとんどないと考えられるので、これを最終的な分布と考えている。ここで、組織と応力の最終的な分布を Fig.5.3-5.6 の (e) から比較する。すると、残留オーステナイトが存在する部分においては残留応力が他の部分より低くなっており、組織が残留応力に影響を与える様子が示されている。これは、相変態を伴う材料の溶接の実験結果 [85, 157] の傾向とよく一致している。このように、材料の固相内で相変態が生じる過程では、相変態がその過程と最終的な力学的挙動におよぼす影響が大きいことがわかる。

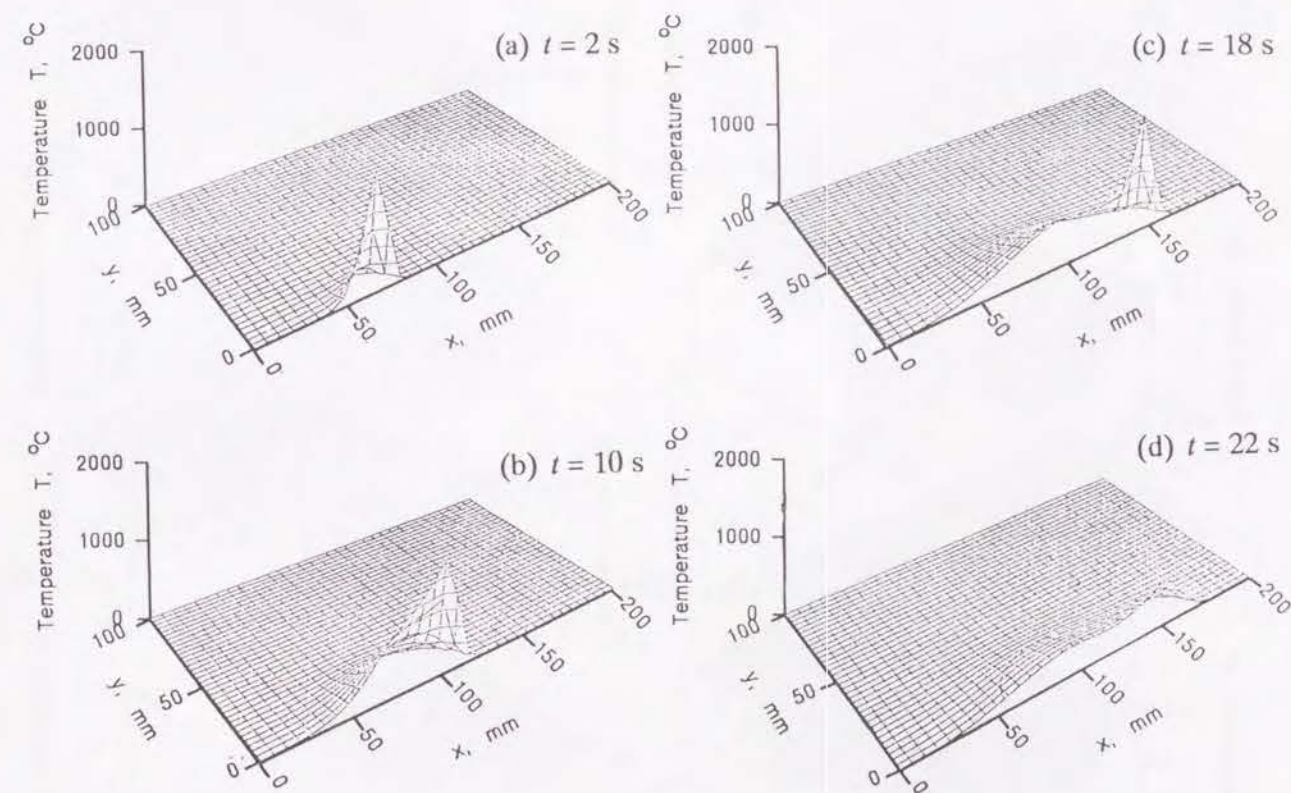


Fig. 5.2. Change of distribution of temperature T .

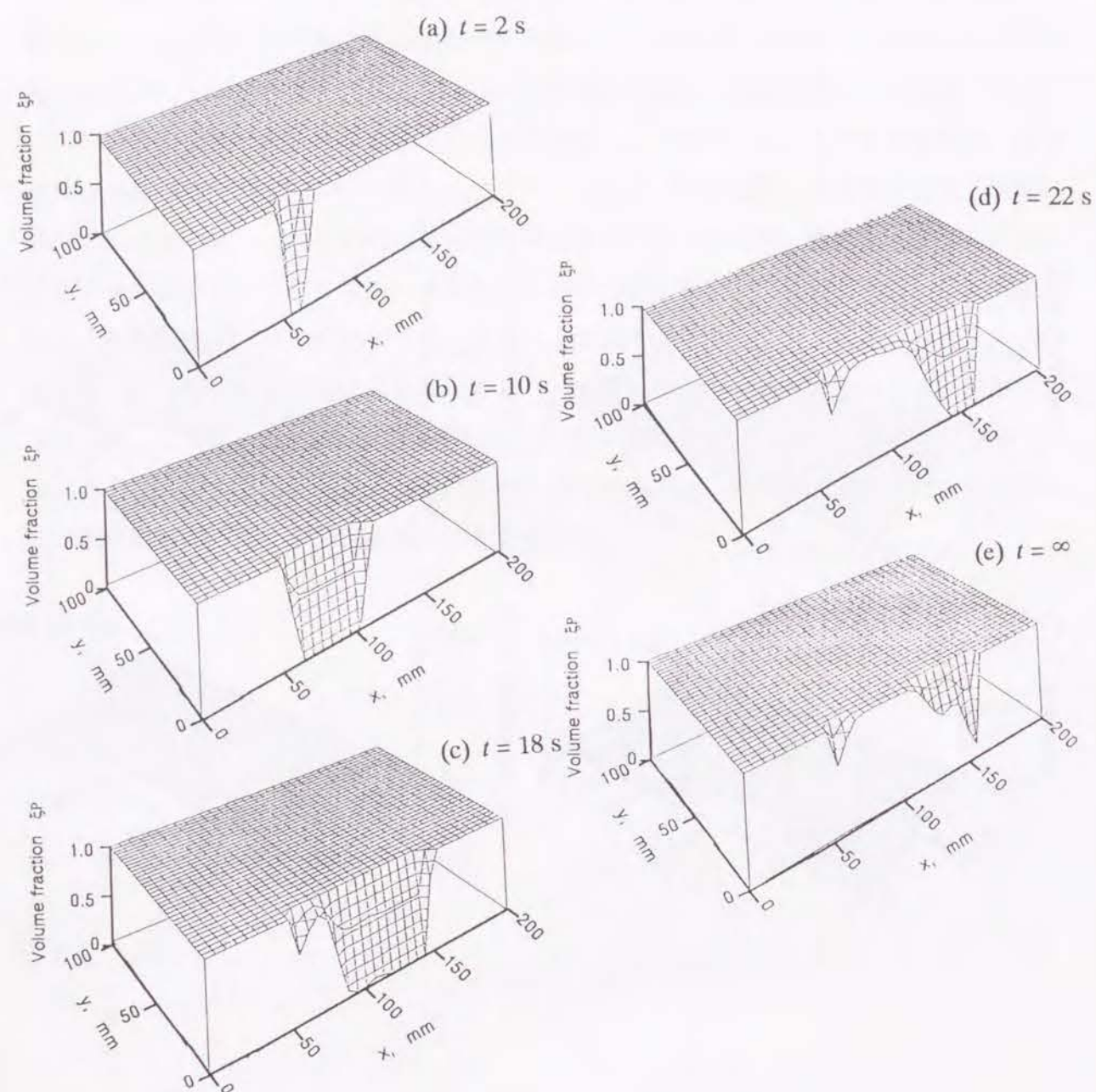


Fig. 5.3. Pearlite volume fraction change during and just after welding.

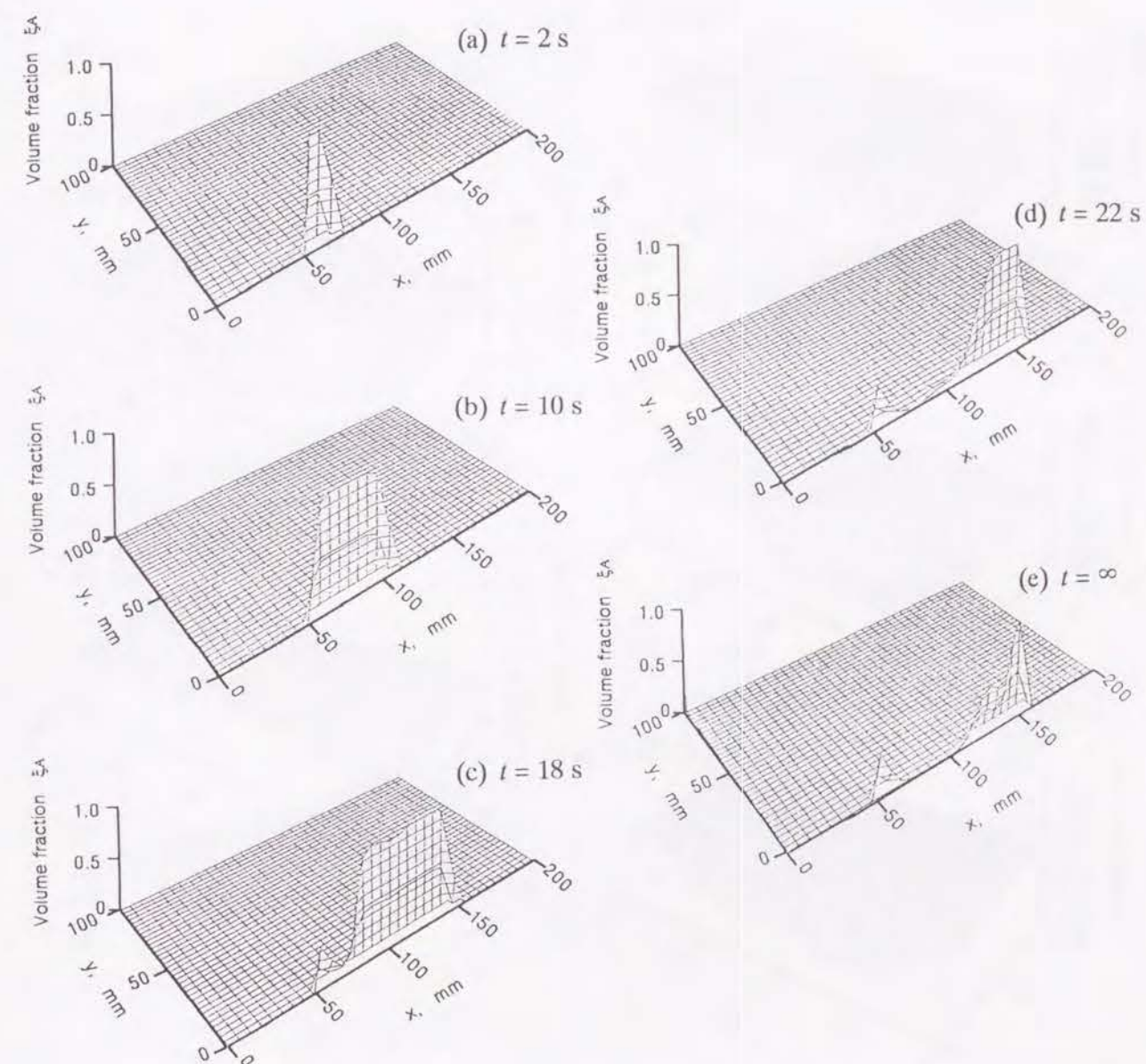


Fig. 5.4. Austenite volume fraction change during and just after welding.

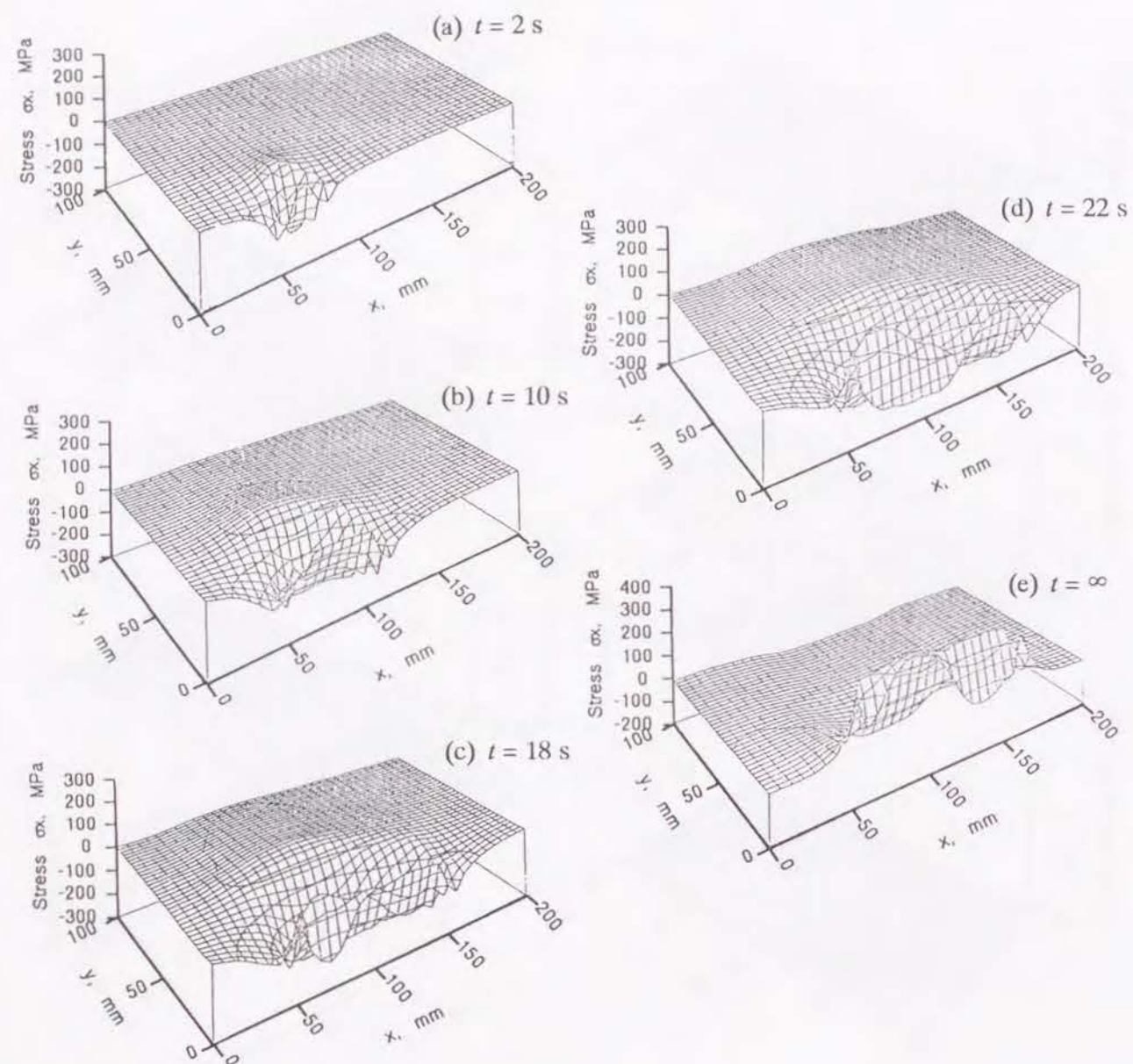


Fig. 5.5. Longitudinal stress distributions during and just after welding.

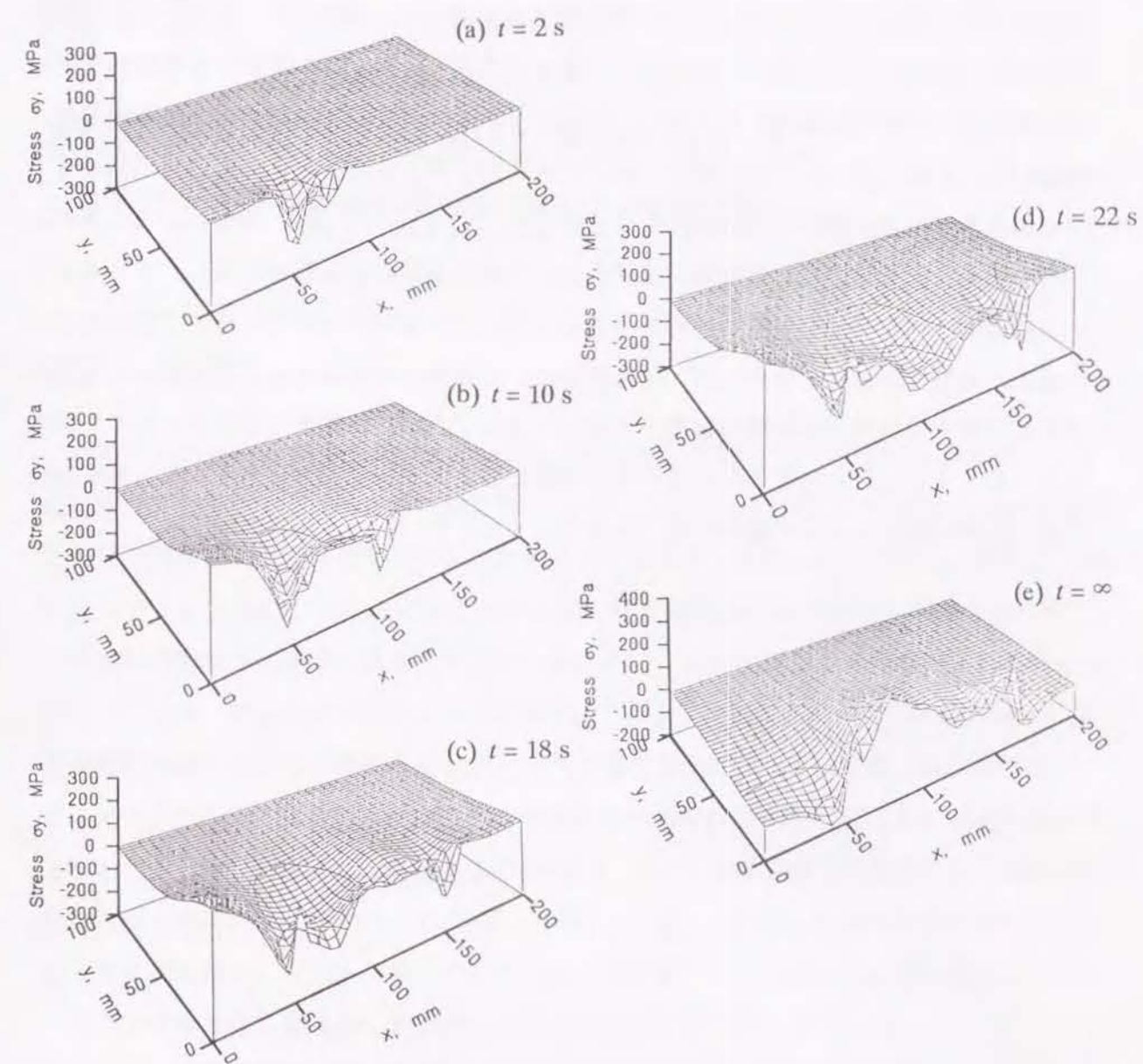


Fig. 5.6. Transverse stress distributions during and just after welding.

5.4 結 言

拡散変態を伴う材料の加熱、冷却過程の力学的挙動の解析方法の確立を目的として、連成解析に第4章で示した拡散変態の変態速度式を適用し、さらに有限要素解析によって溶接過程の熱と組織、応力/ひずみの材料挙動の表現を試みた。解析に際しては、まず連成解析に必要な熱伝導解析に関する関係式と、第3章で示した相変態を考慮した熱弾粘塑性構成関係を用いた有限要素式をもととし、さらに平面応力の条件での定式化した有限要素式を示した。また、溶接モデルと解析に必要な条件を示すと共に、さらにこれらの結果を用いて溶接過程の連成解析を行った。

その結果、第4章で示した変態速度式を用いた溶接過程の数値解析を通じ、オーステナイト逆変態とパーライト変態が同時かつ連続的に生じる過程について、そこでの材料挙動の解析が可能であることを示した。また同時に、炭素鋼の溶接過程および最終的な状態の材料に対する固相内の相変態の影響が大きいことをこの解析結果から示すとともに、現在まで実験を中心に行われてきた溶接の材料挙動におよぼす相変態の影響が、この相変態を考慮した連成解析によって表現可能であることを示した。

第6章

熱影響部の組織変化を考慮した SUS304 鋼の溶接過程の解析

6.1 緒 言

溶接過程の材料挙動におよぼす固相内での相変態の影響については第5章で述べたが、最終的な組織の分布状況、とくに熱影響部 (heat affected zone, HAZ) の状態について知ることが、溶接された製品の強度評価を行うためには重要である。この中でも、耐食性に優れたステンレス鋼の溶接熱影響部における応力腐食割れ (stress corrosion cracking, SCC) は製品の機能低下に重要な影響を与えているため、この熱影響部形成過程の材料挙動を理解することは、製品製造過程における対策を立てる上で重要である。これまで本論文では、相変態を考慮した熱弾粘塑性構成式を用いた有限要素法によって、溶接過程の解析を行う方法について示してきたが、これに熱影響部における材料挙動を定式化した結果を適用することによって、溶接による温度と応力/ひずみ、さらに熱影響部の組織変化も考慮した解析が可能になると考えられる。しかし、ステンレス鋼についてこれらの手法を適用するには、まず熱影響部における組織変化の形態やその影響について調べる必要がある。

そこで本章では、組織変化が影響をおよぼす工学的問題の1つとして、オーステナイト系ステンレス鋼である SUS304 の溶接を取りあげ、熱が組織におよぼす影響として加熱、冷却過程での組織変化について実験によって調べ、これを考慮した溶接過程の数値解析の結果について報告する。組織変化の観察を行うにあたっては、初期の組織状態を調べるため、まず供試材である SUS304 鋼についての組織観察を行った。さらに、溶接のような短時間の加熱・冷却によって、観察された初期組織がどのように変化するか調べるため、高周波

加熱装置によって短時間加熱した試料についても組織観察を行った。また、実際に溶接した試験片の組織観察を行い、その結果を先述の実験結果と比較、検討した。さらに、ここで観察された組織変化について、数値解析に適用することを目的として、加熱による逆変態として相変態のカイネティックスの表示を与えた。また、これらの結果を実際の溶接過程の解析に適用するにあたって、溶融・凝固での固相-液相間での相変態に加え、この逆変態を固相内の相変態として導入した。そして、これらをこれまで本論文で示してきた解析法に適用することによって、溶接過程の数値解析を行った結果から溶接による組織分布が溶接部周辺で母材と異なることを示す。さらに、この溶接熱影響部の範囲と応力分布の比較から、溶接継手の機械的特性におよぼす影響に関して考察を加えることとする。

6.2 溶接熱影響部の組織変化

本章では SUS304 鋼を対象としたが、ここでは圧延などによって加工誘起マルテンサイトが生成した市販の板材から試料を作成した。そして、対象となる鋼板の種々の状態の組織観察を行い、また実際に溶接された SUS304 鋼の溶接部周辺の組織状態も観察し、これらの比較から材料の加熱、冷却過程での組織変化について考察した。

6.2.1 供試材の組織観察

まず、準備した試料に対する光学顕微鏡による組織観察結果を Fig.6.1 に示す。組織観察は、加熱処理を施さずに研磨後エッチングしたものと、簡単に加熱処理してから同様にエッチングを行ったものについて行った。加熱条件としては温度 900°C、保持時間 5 分とし、加熱装置として高周波加熱装置を用いた。加熱は大気中で行い、冷却は空冷とした。組織観察については、腐食薬はエタノールと硫酸、硝酸を 17:2:1 で混合したものを使用した。腐食時間は 5 時間であった。Fig.6.1(a) は熱処理前の試料の観察結果であるが、ここでは結晶粒内に多くの針状組織が観察されている。SUS304 鋼の標準組織であるオーステナイト (以下 γ 相とする) は常温では準安定で、圧延などの加工によってマルテンサイトへと変態を起こす [158]。ここで観察された針状組織が、この加工誘起マルテンサイト (以下 α' 相) であると考えられる。これに対し、高周波加熱装置によって短時間加熱した試料に関する組織観察結果を次に示す。Fig.6.1 (b) が加熱後の組織観察結果である。ここでは、Fig.6.1

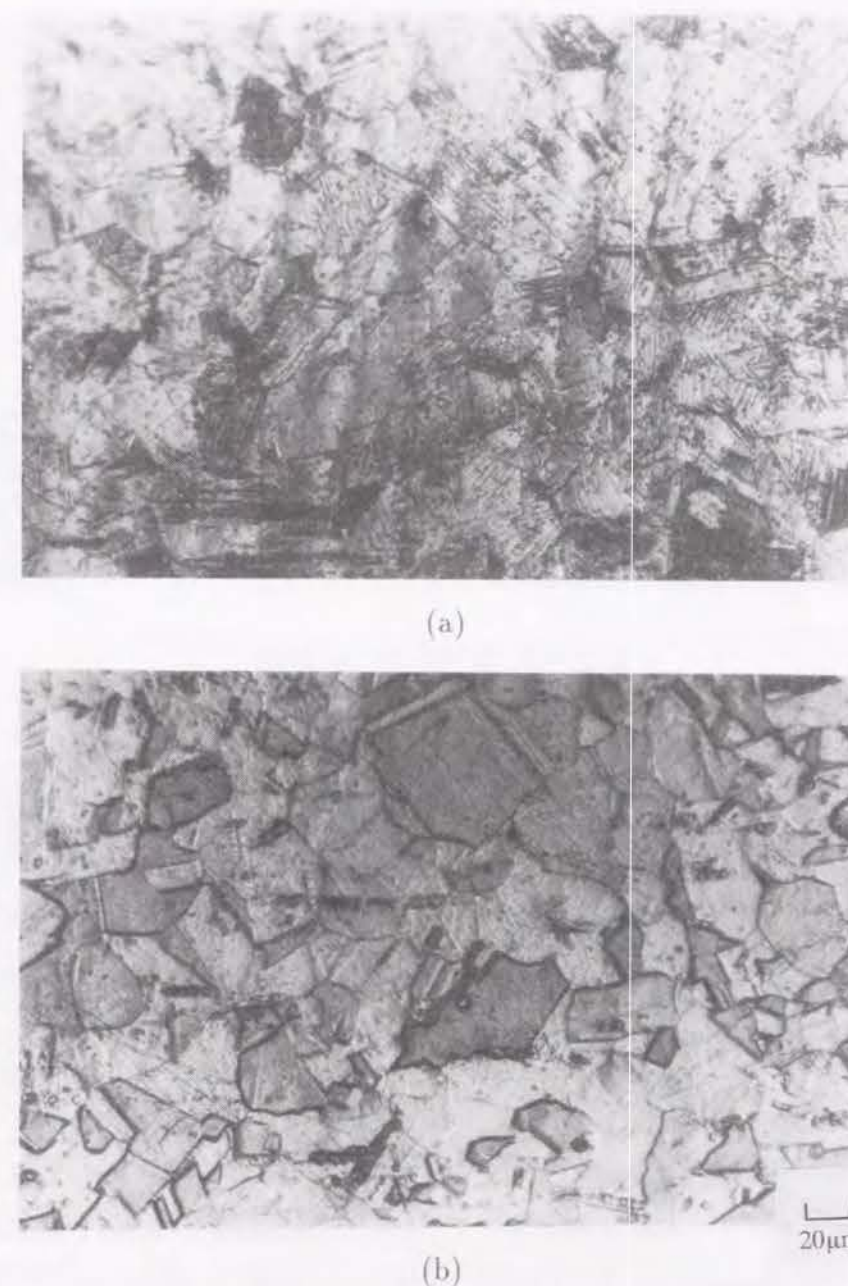


Fig. 6.1. Micrographs of SUS304 steel; before heating(a) and after heating(b).

(a) で観察された針状組織がまったく観察されなかった。これは、加熱によって $\alpha' \rightarrow \gamma$ のオーステナイト逆変態が生じたためと考えられる。 γ 系ステンレス鋼に関する $\alpha' \rightarrow \gamma$ の逆変態の形態の報告によると、材料によってせん断形、拡散形あるいは両者の共存形などがある [159]。これらの違いは組成に依存するものであるが、SUS304 鋼の $\alpha' \rightarrow \gamma$ の逆変態に関する報告 [160] によると、この逆変態の進行過程では拡散現象が支配的であるので、

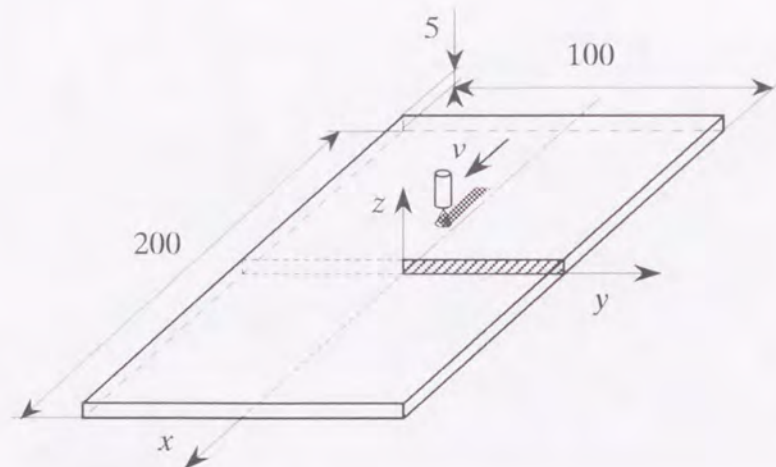


Fig. 6.2. Model for welding.

ここではこの逆変態は拡散形で進行するものとする。

6.2.2 溶接部周辺の組織

溶接した SUS304 鋼の試験片の組織観察結果をここで示す。溶接試験片としては、供試材から Fig.6.2 に示す 200mm × 100mm × 5mm の矩形板を用意し、ビードオンプレートによって中央部 100 mm に溶接を行ったものを用いた。溶接作業は MIG 溶接機で行い、溶接ワイヤーはニッコー溶材工業製 NS-308, ワイヤー径は 1 mm のものを用いた。溶接条件は電圧 22 V, 電流 180 A, 溶接棒の送り速度は 5 mm/s であった。

Fig.6.2 の試験片において、溶接した面 ($z = 5\text{mm}$) の $x = 0\text{mm}$ における $y = 4, 6, 12, 22\text{mm}$ の組織観察結果を Fig.6.3 に示す。Fig.6.3(a) はビード近傍 ($y = 4\text{mm}$) の組織で、左側に観察される黒い部分がビードである。ここでは針状組織がほとんど観察されず、 α' 相の消滅、つまり γ 相への逆変態が起こっているものと考えられる。また、結晶粒内に針状組織が観察されないことから、 $\alpha' \rightarrow \gamma$ の逆変態がほぼ終了しているものと考えられる。さらに、Fig.6.3(b) の溶接線から 6 mm の位置でも粒内の針状組織が完全に消滅した結晶が観察されているが、溶接線から 12 mm の組織分布を示す Fig.6.3(c) では結晶粒中に針状組織がかなり観察されている。Fig.6.3(d) に示すように、溶接線から 22 mm の位置では Fig.6.1(a) に見られた針状組織が全体に観察される。

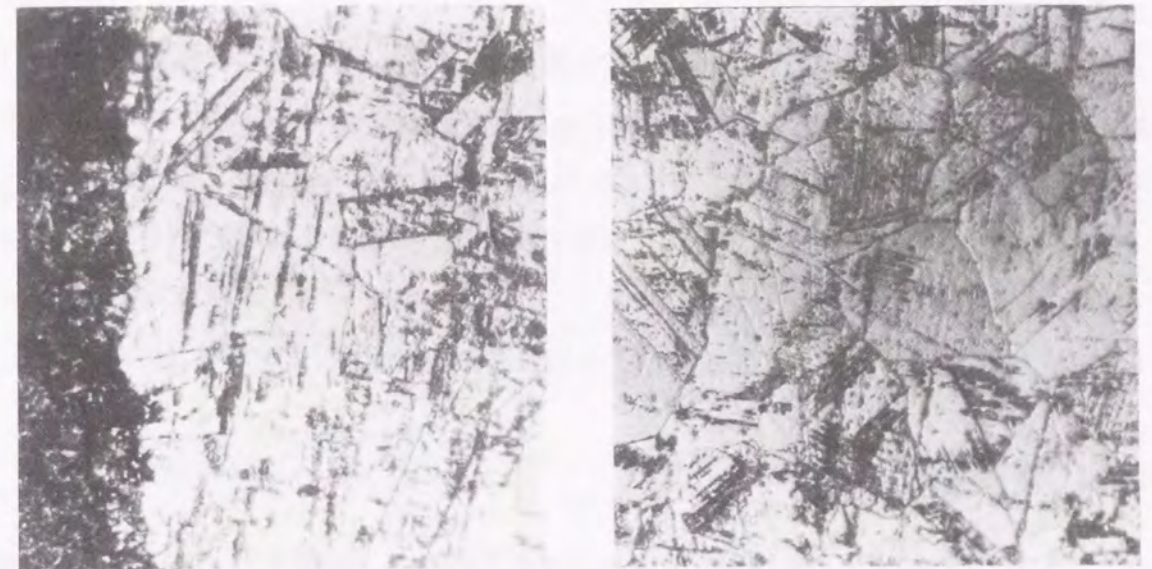
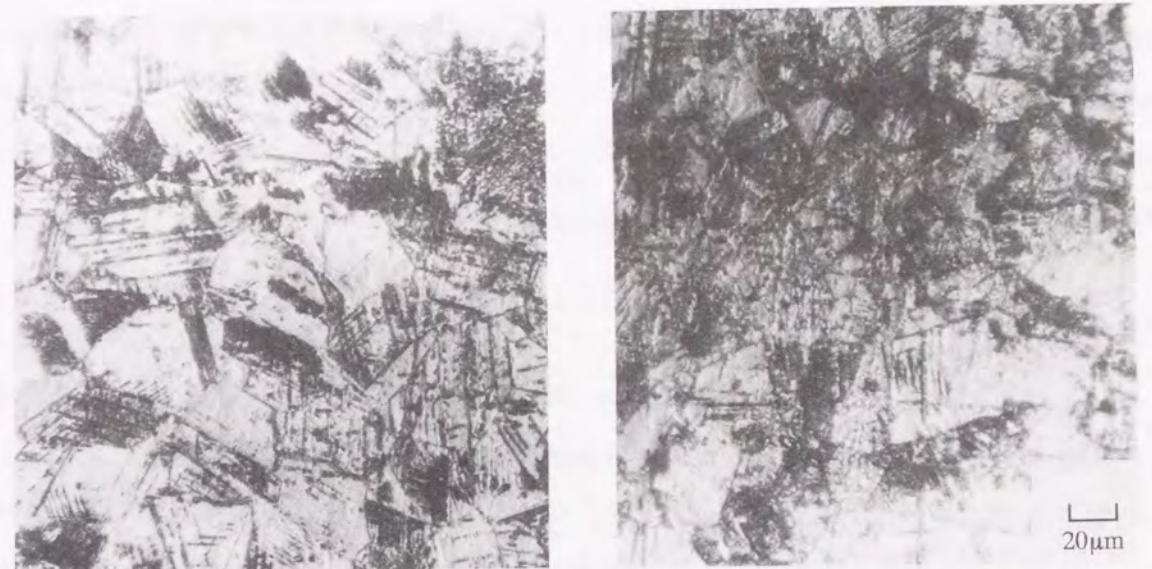
(a) $y = 4\text{mm}$ (b) $y = 6\text{mm}$ (c) $y = 12\text{mm}$ (d) $y = 22\text{mm}$

Fig. 6.3. Photomicrographs of surface of welded SUS304 steel.

これらの結果から、溶接によっても $\alpha' \rightarrow \gamma$ の逆変態が生じ、さらに溶接線に近いほど逆変態が進行していることが考えられる。 γ 相の量は腐食割れなど関係が深いので [161]-[163], 逆変態によって組織が変化している範囲を特定することは、溶接継手の強度の考察を行うための有用な手段になると考えられる。本論文のモデルに関しては、実験結果から逆変態が生じるのは $y = 15\text{mm}$ 以下の範囲であって、また逆変態がほぼ終了しているのは

ビード近傍のみであると考えられる。

なお、 γ 系ステンレス鋼の熱影響部の組織変化としては、今回示した相変態に加えて結晶粒成長などの粗粒化や Cr 炭化物の析出も生じるが [164]、今回の実験では母材内で明かな粒径分布の差などは観察されなかった。これは、MIG(metal inert gas) 溶接によってビードを1パスだけ母材に溶着させる方法を採用したので、入熱量が比較的少なくなったために変化のための駆動力が小さかったためと考えられる。したがって、本章で示す数値解析においては、相変態のみを考えて粗粒化などの他の固相内組織変化は考慮しないこととした。

6.3 解析基礎理論

ここでは、上の実験で示されたような熱影響部の範囲を、数値シミュレーションで推定する方法と実際の計算結果について示す。とくに、応力解析も同時に行うことによって、熱影響部と応力のそれぞれの計算結果の比較を行い、溶接割れなどの溶接継手の強度に関する考察も試みる。解析モデルは、Fig.6.2 に示す斜線部分のみを対象とし、とくに溶接部の材料挙動に着目することから、ここが溶接過程では周辺部に拘束されることも考慮して力学的には平面ひずみ問題 ($\epsilon_z = 0$) とし、さらに有限要素法によって計算を行った。

6.3.1 組織解析

既述のように、ここでは SUS304 鋼の $\alpha' \rightarrow \gamma$ の逆変態は拡散形で進行するものと考え、拡散形の逆変態に関しては、既に第4章で炭素鋼について速度式を提案しており、しかも第5章で溶接過程の解析にも応用しているが、これは加熱、冷却各過程で拡散変態が生じ、しかも各変態が相互に関連している複雑な現象に適したものである。しかし、本論文のように固相内では逆変態しか生じない問題については、変態速度式としてより基本的な形式が利用可能である。したがってここでは、 γ 相の体積分率 ξ_A を規定する逆変態の速度式として、Avrami の式 [165]

$$\xi_A = 1 - \exp(c(T)t^n), \quad (6.1)$$

を用いることとした。温度の関数 $c(T)$ は、組成的にほぼ等しい 18-9 ステンレス鋼の $\alpha' \rightarrow \gamma$ 変態の恒温変態曲線 [159] から、 $n = 1$ 、 T を $^{\circ}\text{C}$ とした上で次式とした。

6.3. 解析基礎理論

$$c(T) = 10^{-2} \left(\frac{T - 400}{400} \right)^{15}. \quad (6.2)$$

Fig.6.4 には、参考にした恒温変態の実験結果 [159] と、式 (6.1)、(6.2) による計算結果を示す。ここでは、実験で γ 相の量が 10% 未満、10% 以上 90% 未満、90% 以上の点をそ

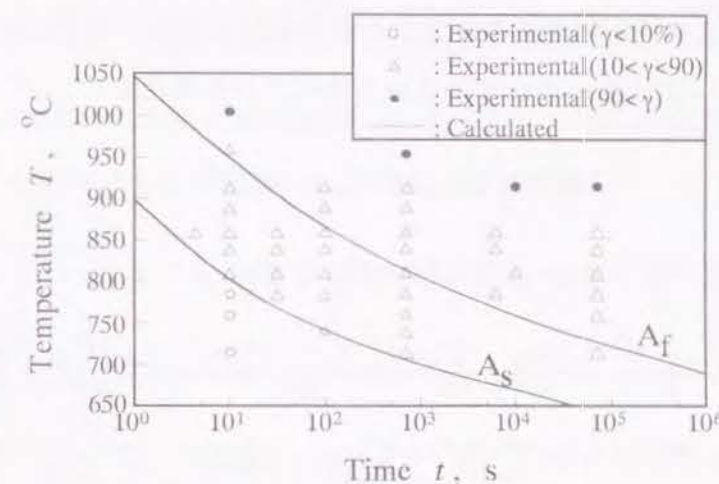


Fig. 6.4. T-T-A curve caused by heating.

れぞれ○、△、●印で、計算の逆変態の開始、終了線をそれぞれ A_s 、 A_f で表す。ここで示すように、変態に要する時間が高温では短く低温で長い拡散形の逆変態の変態挙動 [153] が、式 (6.1)、(6.2) で表現できることがわかる。

6.3.2 温度解析

熱伝導方程式としては、ここでも第5章で示した次式 [19]

$$\rho c \dot{T} - \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} - \rho l_f \dot{\xi}_f - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \rho \dot{\gamma} = 0, \quad (6.3)$$

による定式化の結果を用いることとする。この結果は、前章で示したように

$$[K]\{T\} + [\bar{C}]\{\dot{T}\} = \{Q_\sigma\} + \{Q_\xi\} + \{Q_\gamma\}, \quad (6.4)$$

となる。

6.3.3 応力/ひずみ解析

応力/ひずみ解析に関しては、相変態を考慮した熱弾粘塑性の構成式を用いて、既に第3章において3次元の有限要素法の定式化を示し、さらに第5章において平面応力の条件下での定式化過程を示したが、ここではさらに平面ひずみ問題の有限要素法の定式化について示す。この平面ひずみ問題として溶接現象を取扱う場合は、解析対象に対して溶接部分が小さい場合や、対象の周辺が拘束されている場合などである。

構成関係としては本章でも相変態を考慮した熱弾粘塑性を表す式(3.16)を考え、さらに平面ひずみの条件として z 方向のひずみ成分をすべて0と考えて

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0, \quad (6.5)$$

と仮定する。このとき、 x 方向と y 方向のひずみ速度は

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x = & \frac{(1-\nu^2)\dot{\sigma}_x - \nu(1+\nu)\dot{\sigma}_y}{E} + \frac{(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y}{E^2} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \dot{T} + \sum_I \frac{\partial E}{\partial \xi_I} \dot{\xi}_I \right) \\ & + (1+\nu)\alpha\dot{T} + (1+\nu) \sum_I \beta_I \dot{\xi}_I + \frac{1}{2\mu}(s_x + \nu s_z), \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_y = & \frac{(1-\nu^2)\dot{\sigma}_y - \nu(1+\nu)\dot{\sigma}_x}{E} + \frac{(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x}{E^2} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \dot{T} + \sum_I \frac{\partial E}{\partial \xi_I} \dot{\xi}_I \right) \\ & + (1+\nu)\alpha\dot{T} + (1+\nu) \sum_I \beta_I \dot{\xi}_I + \frac{1}{2\mu}(s_y + \nu s_z), \end{aligned} \quad (6.7)$$

となる。これらを用いて式(3.32)を各応力速度について解くと

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_x = & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \dot{\varepsilon}_x + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \dot{\varepsilon}_y - \frac{\sigma_x}{E} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \dot{T} + \sum_I \frac{\partial E}{\partial \xi_I} \dot{\xi}_I \right) \\ & - \frac{E}{1-2\nu} \alpha\dot{T} - \frac{E}{1-2\nu} \sum_I \beta_I \dot{\xi}_I - \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{1}{2\mu} \{(1-\nu)s_x + \nu(s_y + s_z)\}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_y = & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \dot{\varepsilon}_y + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \dot{\varepsilon}_x - \frac{\sigma_y}{E} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \dot{T} + \sum_I \frac{\partial E}{\partial \xi_I} \dot{\xi}_I \right) \\ & - \frac{E}{1-2\nu} \alpha\dot{T} - \frac{E}{1-2\nu} \sum_I \beta_I \dot{\xi}_I - \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{1}{2\mu} \{(1-\nu)s_y + \nu(s_x + s_z)\}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\dot{\tau}_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \dot{\gamma}_{xy} - \frac{\tau_{xy}}{E} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \dot{T} + \sum_I \frac{\partial E}{\partial \xi_I} \dot{\xi}_I \right) - \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{1}{2\mu} s_{xy}, \quad (6.10)$$

となる。また、 z 方向の応力速度については

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_z = & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \dot{\varepsilon}_x + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \dot{\varepsilon}_y - \frac{\sigma_z}{E} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \dot{T} + \sum_I \frac{\partial E}{\partial \xi_I} \dot{\xi}_I \right) \\ & - \frac{2\nu E}{1-2\nu} \alpha\dot{T} - \frac{2\nu E}{1-2\nu} \sum_I \beta_I \dot{\xi}_I - \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{1}{2\mu} \{\nu(s_x + s_z) + (1-\nu)s_z\}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

となり、とくに式(6.8)、(6.9)をこれに代入すると

$$\dot{\sigma}_z = \nu(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y) - \frac{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \dot{T} + \sum_I \frac{\partial E}{\partial \xi_I} \dot{\xi}_I \right) - E \left(\alpha\dot{T} + \sum_I \beta_I \dot{\xi}_I + \frac{1}{2\mu} s_z \right), \quad (6.12)$$

とすることができる。これらの結果を用い、さらにここでも式(3.55)の定式化過程によって、応力/ひずみ解析の有限要素式として式(3.55)と同形の

$$[K]\{v\} = \{\dot{f}^t\} + \{\dot{f}^b\} + \{\dot{f}^T\} + \{\dot{f}^m\} + \{\dot{f}^{vp}\}, \quad (6.13)$$

が得られる。ここで、式(3.56)-(3.65)に対応する各項では

$$[D^e] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & & \text{sym.} \\ -\nu & 1-\nu & \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (6.14)$$

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}_x \quad \dot{\varepsilon}_y \quad \dot{\gamma}_{xy}\}^T, \quad (6.15)$$

$$\{\dot{\sigma}\} = \{\dot{\sigma}_x \quad \dot{\sigma}_y \quad \dot{\tau}_{xy}\}^T, \quad (6.16)$$

$$\{\dot{s}\} = \{\dot{s}_x + \nu\dot{s}_z \quad \dot{s}_y + \nu\dot{s}_z \quad \dot{s}_{xy}\}^T, \quad (6.17)$$

$$\{\dot{\alpha}\} = \{(1+\nu)\dot{\alpha} \quad (1+\nu)\dot{\alpha} \quad 0\}^T, \quad (6.18)$$

$$\{\dot{\beta}_I\} = \{(1+\nu)\dot{\beta}_I \quad (1+\nu)\dot{\beta}_I \quad 0\}^T, \quad (6.19)$$

であって、これによって相変態を伴う熱弾粘塑性材料の平面ひずみ問題を解析することができる。ただし、ここでは固相における材料挙動の評価に主眼をおいているため、式(6.13)から外荷重 $\{\dot{f}^t\}$ と物体力 $\{\dot{f}^b\}$ を無視した次式によって計算を行うこととした。

$$[K]\{v\} = \{\dot{f}^T\} + \{\dot{f}^m\} + \{\dot{f}^{vp}\}. \quad (6.20)$$

6.4 計算と考察

本章で示した関係式を用いて、ここでは SUS304 鋼の溶接過程における熱と応力/ひずみ、さらに組織として熱影響部の挙動に着目して計算した結果について、その解析条件と共に示すこととする。

6.4.1 溶接モデルと解析条件

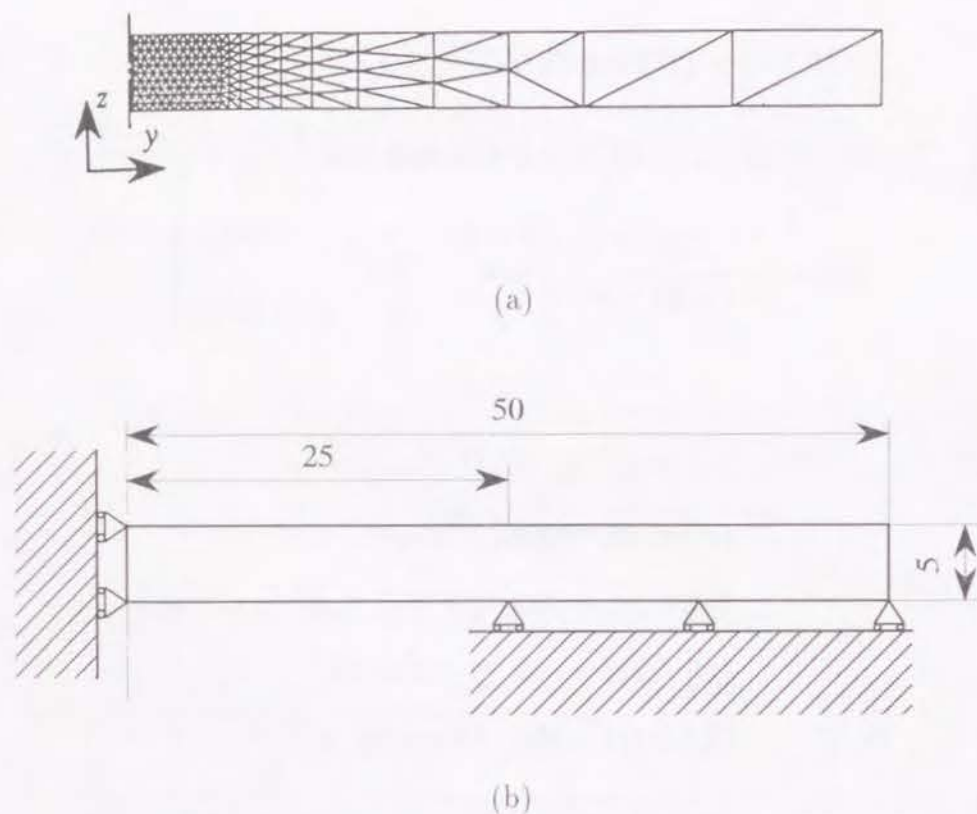


Fig. 6.5. Finite element mesh(a) and constraint(b).

解析に用いる溶接モデルは、実験に用いたものと同じく Fig.6.2 に示された矩形板とし、溶接方法としても溶接線 (x 軸) 上を熱源が移動するビードオンプレートに相当する形式を考えた。ただし、Fig.6.2 の斜線部で表すように、簡単化のため溶接板中央における断面を

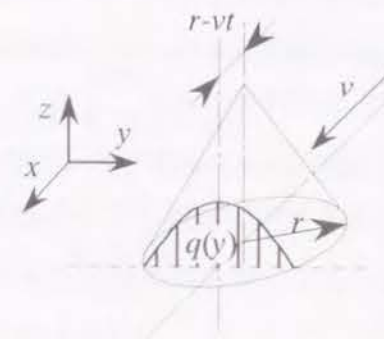


Fig. 6.6. Schematic of distribution of heat supply.

考えてこれを解析領域とし、対称性から全断面の半分のみを計算することとした。この領域において、前節で示したように 2 次元の熱伝導解析と平面ひずみの応力/ひずみ解析を行うものとする。ここで、要素分割は Fig.6.5 のように要素数 313、節点数 184 で作成した。解析対象の厚さは 1 mm とし、入熱はビード幅を 6 mm とし、軸が電極の中心と一致する円錐形に分布させ、これが溶接線上を一定速度で移動しているものと想定した。また、熱は解析対象上を通過している間のみ所定の量を与えられるものとした (Fig.6.6)。入熱量は 800 kJ/m としているが、本解析では溶着金属を考慮していないことや溶込みを調整するため、熱効率を 0.3 としている。熱放出は表面において生じるが、これは熱伝達量 $\bar{h}(T - T_w)$ を逆に入熱量 \bar{q} として与えることで算出する。雰囲気温度 $T_w = 20^\circ\text{C}$ 、熱伝達率 $\bar{h} = 20\text{W/m}^2\text{K}$ とした。解析に必要な SUS304 の物性値は、文献 [166] および松井らの実験結果 [167] から求めた。それらの値を Table 6.1 に示す。ただし、解析では母相の初期状態はすべて α' 相としているが、粘塑性解析に必要な α' 相の物性値が不十分であったので、ここでは固相間で物性値の差は考慮しないものとし、 α' 相と γ 相は同一の物性値を用いている。

6.4.2 解析結果と考察

ここまで本章で示した関係式を用いた溶接過程の計算結果を、Fig.6.7 から 6.10 に示す。ここまでは $y = 20\text{mm}$ までの結果を示すが、計算は、温度分布の差が小さく、同時に温度、応力、組

Table 6.1. Material properties of SUS304 steel.

ρ , kg/m ³	7900
c_s , J/kg·°C	$493 + 2.01 \times 10^{-2}T$
k_s , W/m·°C	$14.5 + 1.82 \times 10^{-2}T - 4.95 \times 10^{-6}T^2$
k_l , W/m·°C	$530 + 7.0 \times T - 4.5 \times 10^{-4}T^2$
l , J/kg	2.7×10^5
T_s , °C	1450
T_l , °C	1550
m_s , °C/%	4.833
m_l , °C/%	5.778
E_s , GPa	$250 - 0.13T$
ν	0.35
$\bar{\mu}_s$, MPa·s	$1019 + 4.27 \times 10^{-1}T - 6.53 \times 10^{-4}T^2$
$\bar{\mu}_l$, MPa·s	7.0×10^{-9}
σ_y , MPa	$228 - 0.234T + 5.89 \times 10^{-5}T^2$
H'_s , GPa	$4.125 - 5.92 \times 10^{-3}T + 2.17 \times 10^{-6}T^2$
α_s , 1/°C	1.8×10^{-6}
β	0.022

組織分布の変化も小さくなる $t = 60$ s までとしている。

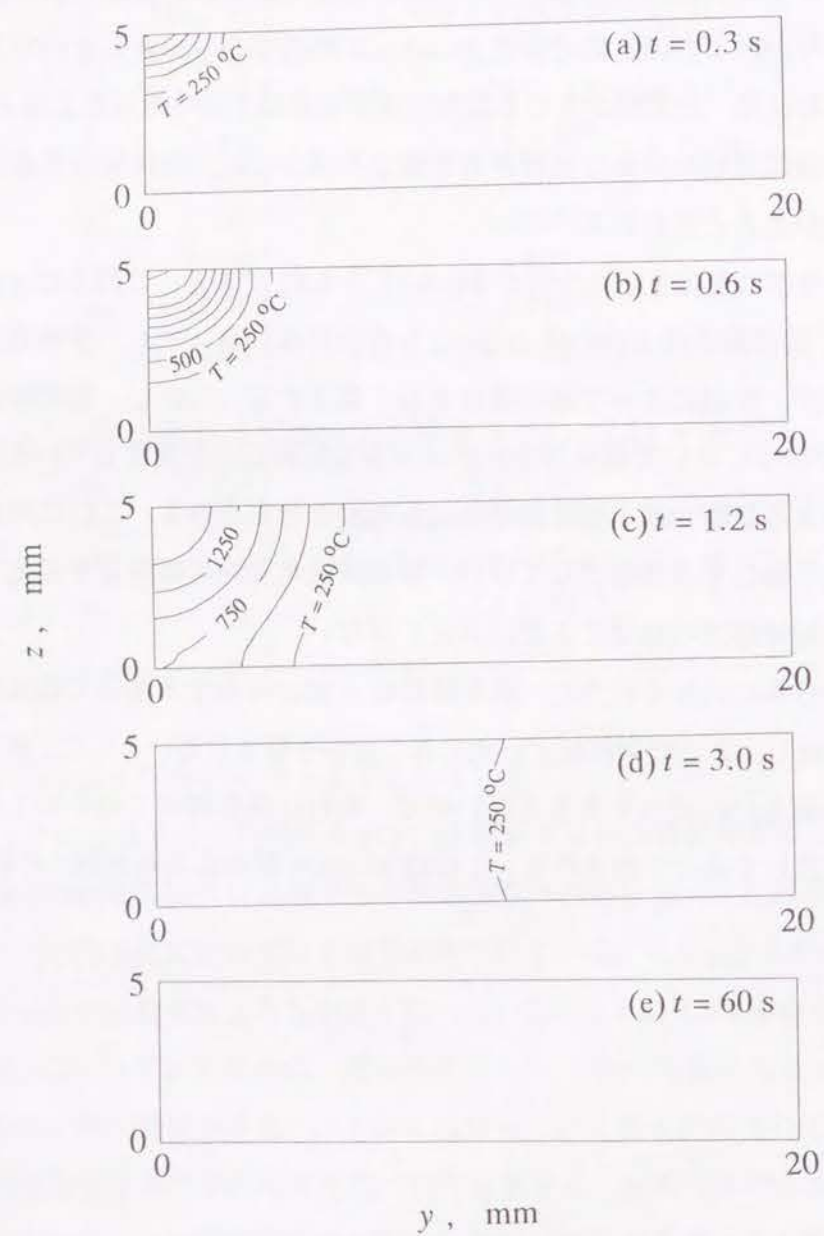
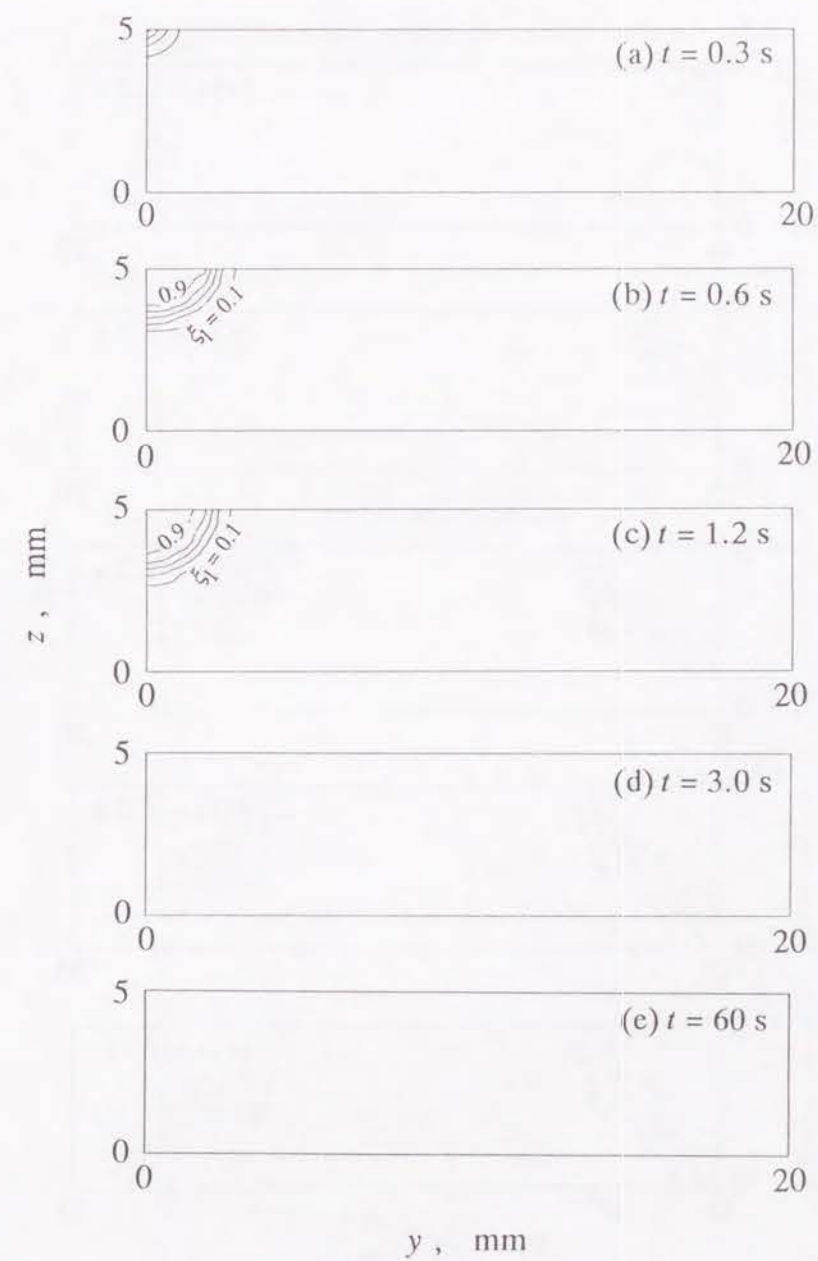
まず、Fig.6.7 には温度分布の変化を示す。本解析では熱は解析対象の上面から供給されるが、この過程の初期段階では高温である範囲が溶接線部分 ($y=0$) に存在し、それが時間の経過と共に同心円上に広がっていく様子が示されている。とくに、0.6 s では最高温度の近辺がその周辺部の温度勾配よりも小さくなっている。さらに 1.2 s をみると、温度が上昇している範囲は広がっているものの、最高温度は 0.6 s に比べて低くなっている。さらに時間が経過すると、熱が溶接線直角 (y) 方向に伝わっていく様子が示されている。

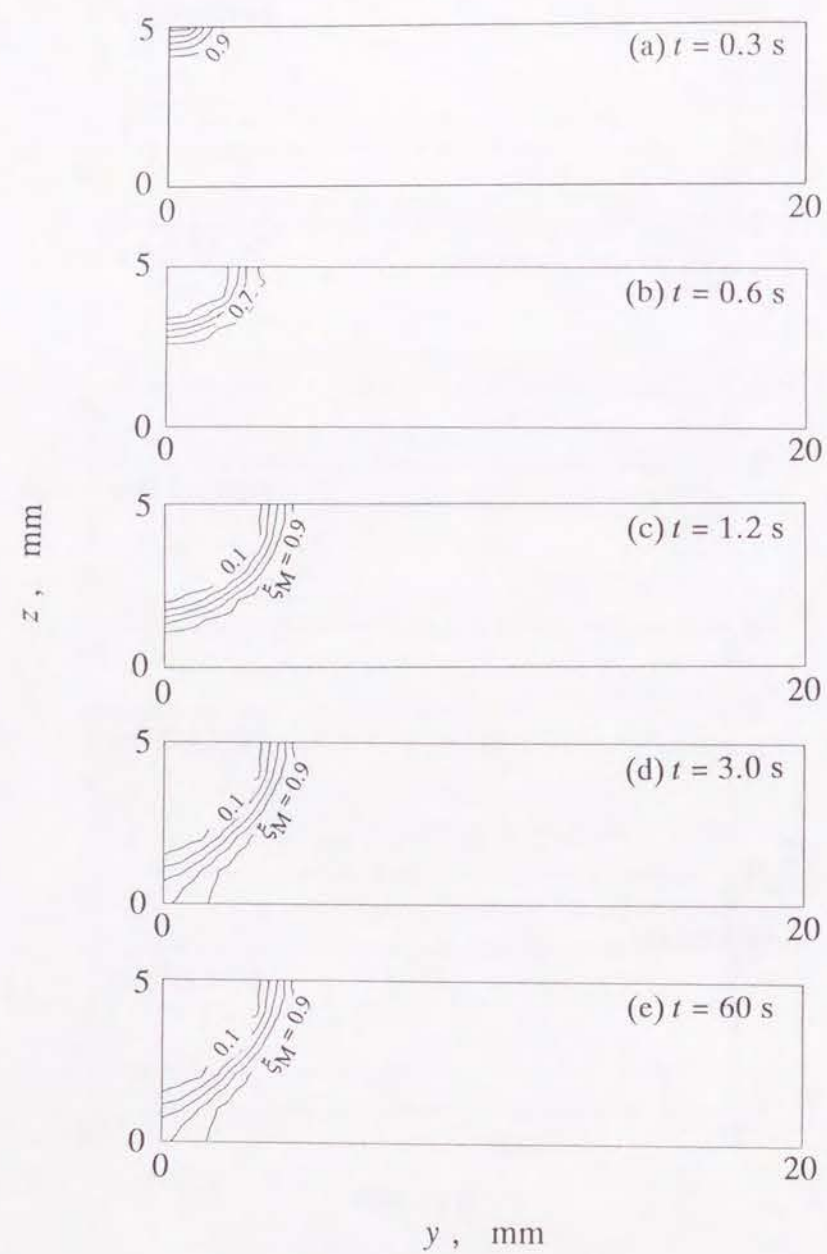
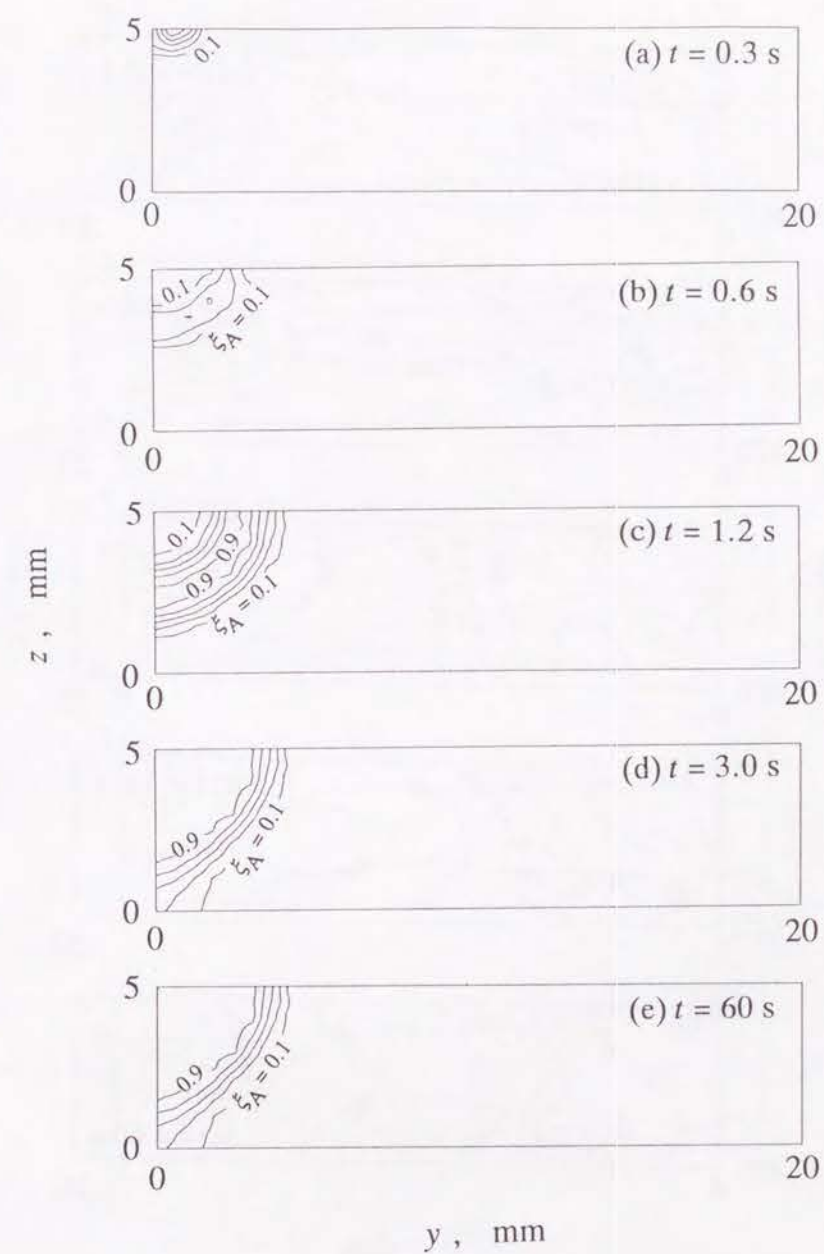
また、各相の体積分率の分布の変化について考察する。液相の体積分率の変化を示したのが Fig.6.7 である。熔融領域が温度上昇にしたがって広がるが、その範囲は溶接終了後に凝固によって消滅してしており、溶接による熔融・凝固の連続的な現象が示されている。 α' 相、 γ 相の各体積分率の変化をそれぞれ示したのが Fig.6.9 と 6.10 である。ここでは、母相である α' 相は溶接の進行に伴って溶接部とその周辺部で消滅し、その範囲は溶接終了後も回復せずに α' 以外の相へと変化したことが示されている。これに対して Fig.6.10 で

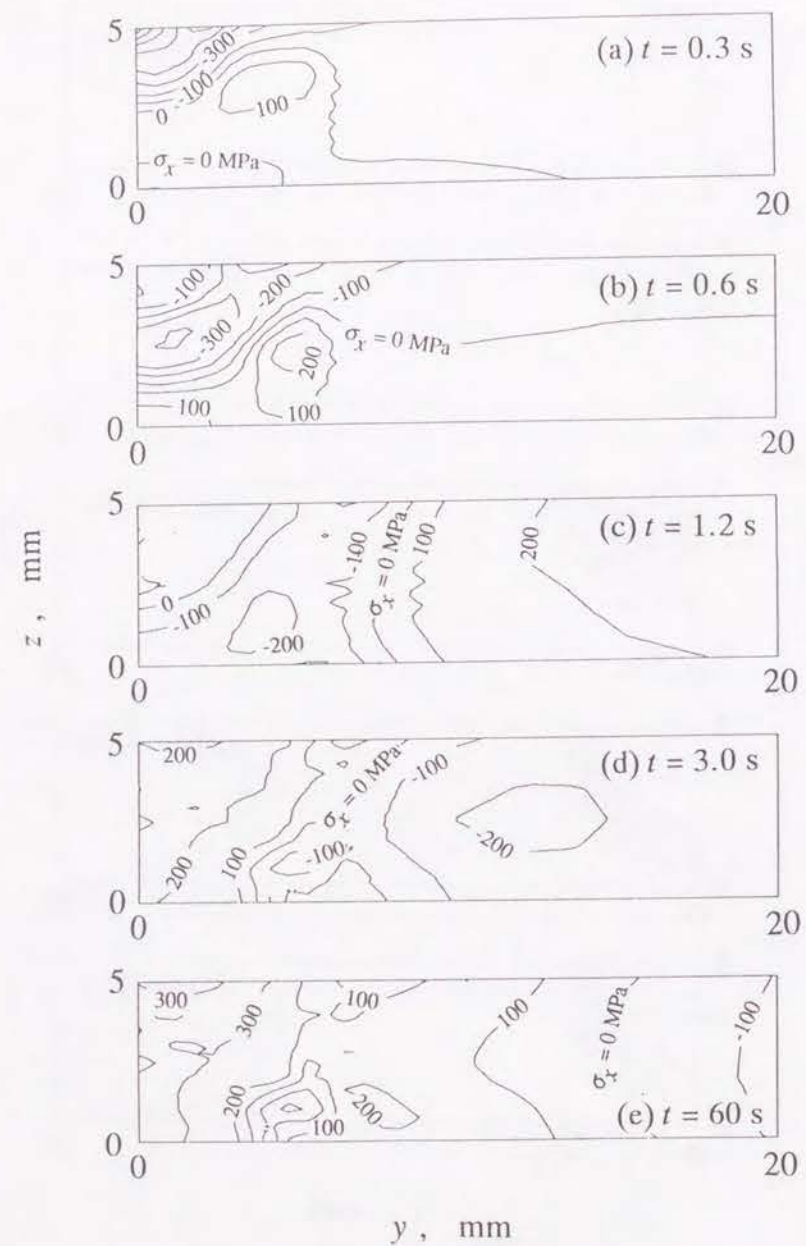
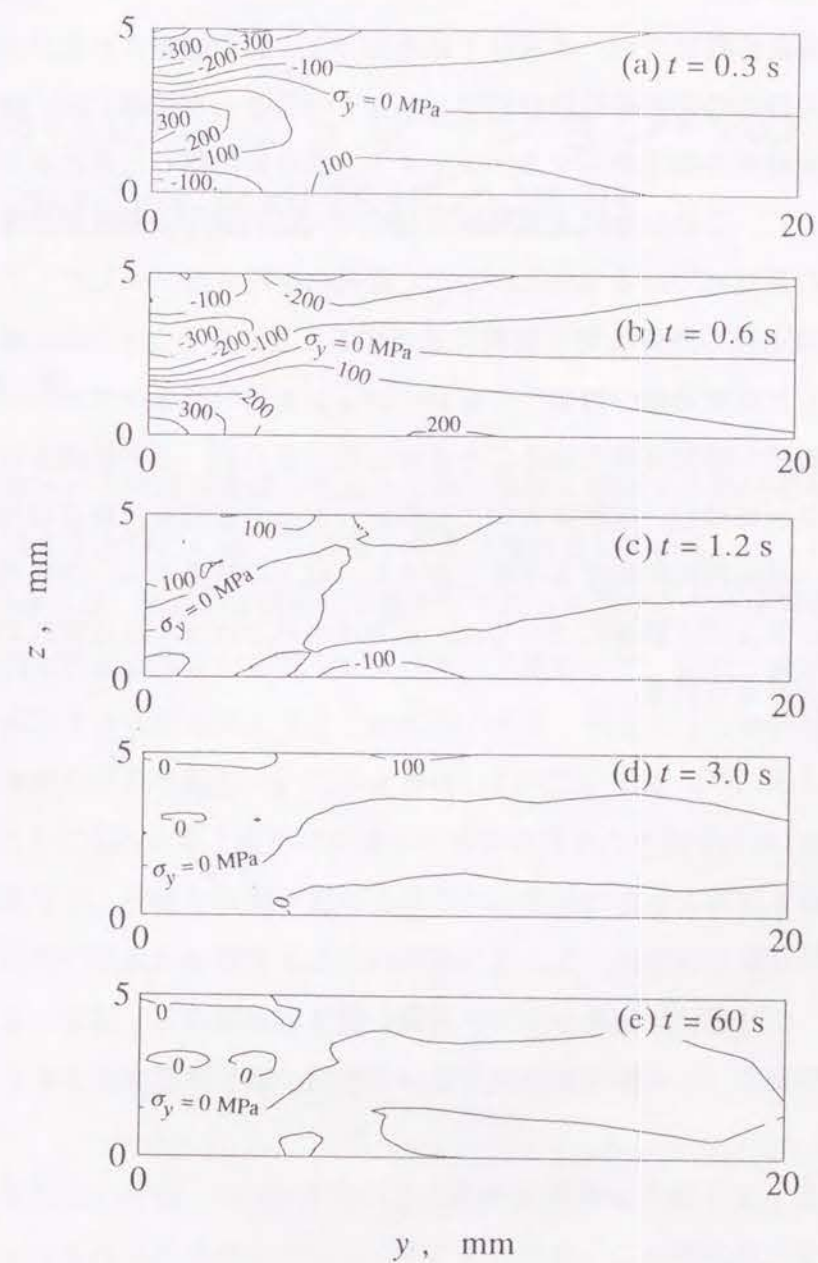
は、 γ 相が液相と α' 相の間で生じている。さらに液相、つまり熔融領域が溶接終了後に消滅した後でも、 γ 相が熔融した領域とその周辺部で存在していることが示され、この部分が熱影響部と考えることができる。これから、熱影響部の組織変化のシミュレーションが可能であることが示される。しかし、今回の解析結果では実験結果より狭い範囲でしか逆変態が生じていない。これは、先述の理由によって熱効率を 0.3 としたので入熱量が実験より小さくなった結果、逆変態が生じる温度に達する範囲も狭くなったためと考えられる。したがって、溶接部周辺の詳細な材料挙動を論じる場合には、溶加材を考慮したモデルなどを考える必要があると思われる。

さらに、応力分布の変化を示したのが Fig.6.11 と 6.12 である。これらによると、溶接線方向の応力 σ_x 、溶接線直角方向の応力 σ_y どちらの分布においても、加熱過程では大きな熱応力が生じるが、熔融によってその値は著しく低下する。しかし、凝固後の冷却過程に関しては、 σ_x の分布において溶接部を中心に大きな引張応力が発生している。これは、温度低下や凝固による収縮が周辺部に妨げられるためと考えられる。これに対して σ_y では、本解析は対象を平面ひずみ問題として扱い、溶接線直角方向には拘束を考えていないこともあって、冷却後は応力の値はここでは大きくはない。

応力と組織の分布の比較を行うと、熱影響部の γ 相が存在する部分で溶接線方向に大きな引張応力が存在し、ここで割れなどが生じることが予想される。とくに、溶接線直角方向の応力値は溶接線方向に比べて大きくないので、割れは熱影響部で発生して溶接線に対して直角な方向に進行すると予想される。これは SUS304 鋼の応力腐食割れの研究報告 [161] などと一致する。

Fig. 6.7. Change of distribution of temperature T .Fig. 6.8. Change of distribution of ξ_l .

Fig. 6.9. Change of distribution of ξ_M .Fig. 6.10. Change of distribution of ξ_A .

Fig. 6.11. Change of distribution of longitudinal stress σ_x .Fig. 6.12. Change of distribution of transverse stress σ_y .

6.5 結 言

本章では、SUS304 鋼の溶接による熱影響部の材料挙動を調べることを目的として、SUS304 鋼の加熱による組織変化の観察とその定式化、さらにそれを溶接過程の数値シミュレーションに適用することを試みた。

まず、実験による組織観察では、供試材である SUS304 鋼で観察された針状組織が加熱によって消滅し、同様の現象が溶接部周辺でも生じていることを確認した。また、加熱処理前の供試材の針状組織を加工誘起マルテンサイト、短時間加熱した後に観察された組織をオーステナイトとし、この加熱による組織変化をオーステナイト逆変態と考えることによって、拡散変態の速度式である Avrami の式で定式化を行った。そして、この結果を相変態を考慮した溶接過程の熱弾粘塑性解析に適用することにより、SUS304 鋼の熱影響部の組織変化を考慮した溶接過程の数値シミュレーションを行い、オーステナイト逆変態が生じる熱影響部の範囲が推定可能であることを示した。さらに、この範囲を同時に行った応力分布の解析結果と比較し、溶接線方向に引張応力が生じる部分と熱影響部が一致していることを示して、溶接割れに関する考察を加えた。以上の結果から、溶接部周辺の材料挙動が機械的特性におよぼす影響については、応力ばかりではなく組織変化の解析からも考察が可能であると考えられる。

第7章

溶接過程のシミュレーションへの 固相-液相の連成解析の適用

7.1 緒 言

溶接で観察される溶融現象は、溶融のための加熱に起因する熱ひずみや相変態などとともに、溶接過程を力学的に論じる問題を非常に難解としている。とくに、溶融池 (molten pool) の材料挙動は、製品の最終形状や溶接部の溶込み量などに直接影響するために、溶接部材の機械的な性質に大きな影響をおよぼすにも関わらず、固相と液相の機械的性質の差や相境界が移動する問題も絡んでとくに難解である。現在までこの問題に関する研究においては、溶融池の材料挙動についての考察は行われているものの、それと最終的な溶接部材の性質、とくに応力分布と変形に関連した考察はほとんど見受けられなかった [99]-[114]。そこで本論文では、物体が液相と固相それぞれの領域によって構成され、さらに溶融・凝固によって両相の境界が移動する過程の問題に対して、力学的な考察を行うことを目的として、第2章で移動する内部境界を持つ解析モデルと基礎式を示した。さらに、この解析モデルに第3章で相変態を考慮した熱弾粘塑性構成式を適用し、有限要素式の導出過程を示している。

そこで本章においては、第2、3章の定式化の結果をもとにして、実際に溶接過程のシミュレーションを行った結果について示すこととする。この際には、まず実際に計算を行うための方法について改めて示すこととし、さらに実際の数値解析のための定式化と溶接モデル、計算条件について示すこととする。また、計算結果については、温度と溶融範囲、速度、変形と応力の分布に関して考察し、液相領域の材料挙動が最終的な状態にどの様に

影響をおよぼすかを論じる。さらに、溶融・凝固過程の力学的問題におけるこれらの考察過程を通して、液相、固相の各領域に分割して解析する方法について検証することとする。

7.2 数値解析理論

本章での溶融・凝固過程の解析に適用する理論に関して、既に第2章および第3章で示した基礎式と構成式、有限要素式をもとに、ここでは実際の解析に適用する方法について平面ひずみモデルを用いて説明する。

7.2.1 解析の基本的な流れ

多くの工学過程で観察される組織変化を考慮した熱・力学的過程の解析方法として、これを相変態を伴う非弾性問題と考え、第5章で示したように温度と組織、応力/ひずみ解析を連成させながら、単一の領域からなる解析モデルを用いて解く方法がある。しかし、本論文の第2章においては、異なる相間では応力/ひずみ解析において同一の手法が適用できない問題に対して、系を各相毎の領域に分割した解析モデルを用いて、両領域の間に成立する関係を相境界が移動する場合について示した。さらに第3章においては、溶融・凝固過程の力学的問題を論じるために、固体から液体までの材料挙動を表現可能な粘塑性構成式を複数領域から成る解析モデルに適用し、有限要素式とそれによる計算方法を示している。

そこで示した考えの下で実際のシミュレーション行うに当たって、Fig.7.1には本章で用いた数値解析法の簡単な流れを示す。これは、第3章の考察結果にしたがって、本解析では基本的に変形は固相が支配的であると考え、応力/ひずみ解析は先に固相について行うものとしている。さらに、この解析結果をもとに液相との境界条件を明らかにし、それを考慮して上で液相の応力/ひずみ解析を行うものである。またこのような数値解析では、一般的にここで内部境界での境界条件を満足するまでこれらの計算を繰り返すことが要求されるが、本章で扱う解析は非定常問題としているために演算時間が多く必要な上、同様の計算を次のステップでも行うことなどから、境界での速度分布は当段階で考慮するのに対して、液相の解析から得られた応力分布については次段階で考慮するものとしている。このようにすることによって、系全体として外部境界を満足させながらひずみの連続性や力のつり合い条件などを満足する解が得られるものである。

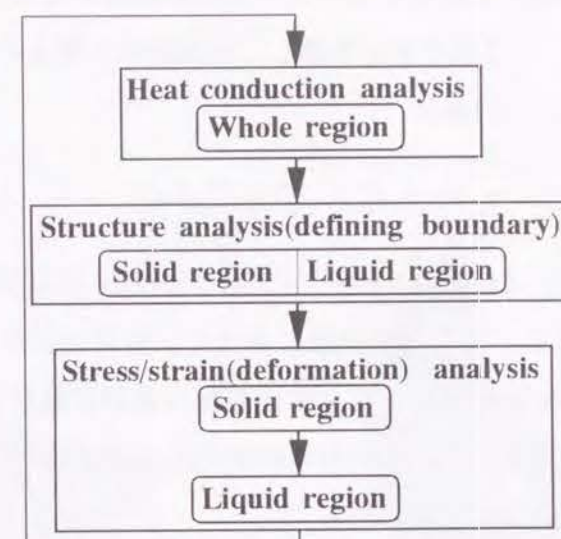


Fig. 7.1. Flow chart for calculation.

7.2.2 温度と相変態の解析

温度分布および液相・固相の各領域と両者の境界については、第5、6章と同様に、式(5.1)に示した変態の潜熱を考慮に入れた熱伝導方程式

$$\rho c \dot{T} - \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} - \rho l \dot{\xi}_l - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \rho \dot{\gamma} = 0, \quad (7.1)$$

をここでも考え、これを用いた結果である式(5.4)を全領域に適用しながら、さらに液相・固相間の相変態を表現する式(4.1)で示したてこの法則

$$\xi_l = \frac{(T - T_s)/m_s}{(T_l - T)/m_l + (T - T_s)/m_s}, \quad (7.2)$$

によって液相の体積分率 ξ_l を算出し、これらから温度分布および相境界を算出することとした。

7.2.3 応力/ひずみ解析

計算を容易に行うために非弾性解析ではなんらかのモデル化を行う場合が多いが、本章においても問題を平面ひずみモデルとして扱うこととする。とくに、第3章で示した有限要素式をもとにして解析を行うため、平面ひずみの条件下での有限要素式の定式化の結果について、改めてここで説明することとする。

構成関係としては、固相から液相までの力学的材料挙動を表現可能であることから、本論文の解析でも既に用いている相変態を考慮した熱弾粘塑性構成式を考える。このとき、全ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ は式 (3.16) と同様に

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} + \dot{\varepsilon}_{ij}^T + \dot{\varepsilon}_{ij}^m, \quad (7.3)$$

で与えられる。ここで、 $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ は弾性ひずみ、 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ は Perzyna 形粘塑性ひずみ、 $\dot{\varepsilon}_{ij}^T$ は熱ひずみ、 $\dot{\varepsilon}_{ij}^m$ は変態ひずみである。この構成関係に対して、液体の条件 (降伏応力 $\sigma_y = 0$ MPa) を与えると Newton 流体の構成関係となつて、液体の材料挙動が表現可能となる [56]。したがって、ここでは降伏応力 σ_y の値が力学解析での液相領域と固相領域の区別の基準となつて、それは以下のようにまとめられる。

$$\sigma_y = \begin{cases} \sigma_{y0} + H' \bar{\varepsilon}^{vp} & \text{in } V_s \\ 0 & \text{in } V_l \end{cases}. \quad (7.4)$$

ただし、 σ_{y0} は初期降伏応力、 H' は硬化係数、 $\bar{\varepsilon}^{vp}$ は相当粘塑性ひずみである。ここで、一般的に相当粘塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^{vp}$ は初期状態から積算されるものであるが、溶融した範囲についてはこれを凝固した時点から求めている。また、式 (7.2) で示した固相線 T_s と液相線 T_l にある領域は、組織が dendrite などの固体と液体と共存領域であつて半溶融領域 (mushy zone) と呼ばれるが、液体の変形量が固体よりも大きいため液相が変形については支配的であると考え、これを液相領域の一部として本章では扱うこととした (Fig.7.2)。

ここで、第2、3章で示した結果を用いて平面ひずみの条件下での固相の有限要素式の定式化を行うと、第6章の式 (6.13) と同様な

$$[K]\{v\} = \{\dot{f}^t\} + \{\dot{f}^b\} + \{\dot{f}^T\} + \{\dot{f}^m\} + \{\dot{f}^{vp}\}, \quad (7.5)$$

なる関係が得られる。ここで、 $\{v\}$ 、 $\{\dot{f}\}$ はそれぞれ速度、等価節点力速度であつて、添字 t, b, T, m, vp はそれらが表面力、体積力、温度、相変態および粘塑性ひずみに依存したものであることを表している。さらに、 $[K] = \sum_V \int_{V_e} [B]^T [D_e] [B] dV$ であつて、平面ひずみの条件下で $[D_e]$ は平面ひずみの弾性マトリックスとなる。

さらに、液相領域に関する有限要素式は、penalty 数 λ を用いて第3章の式 (3.90) と同形の

$$([\hat{D}] - \lambda[\hat{E}])\{v\} = \{\dot{f}^t\} + \{\dot{f}^b\} + \{\dot{f}^T\} + \{\dot{f}^m\}, \quad (7.6)$$

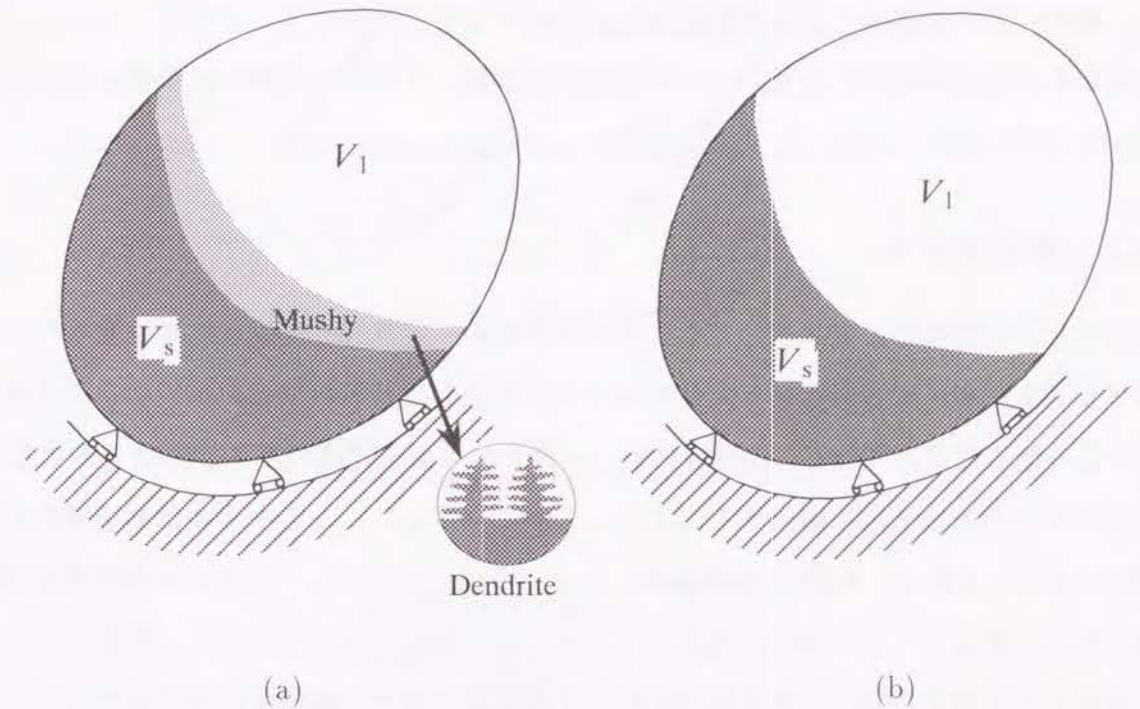


Fig. 7.2. Mushy zone(a) is included in liquidus region V_l (b).

となる。ただし、ここでは

$$[\hat{D}] = \sum_V \int_{V_e} 2\mu [B]^T [C] [B] dV, \quad (7.7)$$

$$[\hat{E}] = \sum_V \int_{V_e} [B]^T \{A\} \{A\}^T [B] dV, \quad (7.8)$$

であつて、また平面ひずみの条件を表す式 (6.5) から、 $[C]$ 、 $\{A\}$ はそれぞれ

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & & \text{sym.} \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad (7.9)$$

$$\{A\} = \{1 \ 1 \ 0\}^T, \quad (7.10)$$

となる。ただし、第3章で示したように液相に関しては penalty 法で定式化を行っている。

7.3 溶接過程の解析への適用

ここでは、本章で示してきた関係式を実際の溶接過程のシミュレーションに適用するために、解析に用いる溶接モデルと解析条件について示すこととする。さらに、それらの計算結果から溶接過程の材料挙動、とくに熔融時の挙動とその最終状態への影響を論じると共に、ここでの解析手法についても論じる。

7.3.1 解析モデル

本章で用いる溶接のモデルとしても、平板中央部の一定区間を直線状に加熱するビードオンプレートに相当する形式を考えた (Fig.7.3)。実際の数値解析では、解析の目的と演算に要する時間を考慮に入れて、溶接線に対して直角な平面を同線の長さ方向の中央で考え、そこに平面ひずみモデルを適用することとしている。さらに、このモデルは溶接線に対して対称であることから、Fig.7.3の斜線部に示すように、先に示した領域の半分のみを解析対象とした。さらに、この領域に対して Fig.7.4(a) に示すように節点 169、要素 278 となる有限要素分割を行い、これを同 (b) に示す境界条件の下で解析を行うこととした。このモデルで溶接棒は平板の中央部を移動するものとし、第6章と同様に入熱はビード幅を 6 mm として熱量をその軸が電極の中心と一致する円錐形に分布させ、解析対象上を通過している間のみ所定の熱が与えられるものとしている (Fig.6.6)。入熱量は 800 kJ/m、熱効率率は 0.3 とし、送り速度は 5 mm/s としているので入熱に要する時間は 1.2s となる。熱的な境界条件としては、中心線 ($y = 0$ mm) 以外の外界と接する境界において熱伝達のみを考慮に入れている。解析で対象とする材料としても、第6章と同様に SUS304 を考えることとして、物性値も前章に示した値を用いた (Table6.1)。相変態については、本章では液相と固相間の溶融・凝固のみを考慮することとし、本解析ではその他の変態、例えば熱影響部などでの固相内の組織の変化は考えないものとした。

7.3.2 計算結果と考察

これまで示した関係式、解析モデルおよび解析条件によって、ここでは実際の計算結果に関する考察および関係式と計算方法に関する考察を示す。

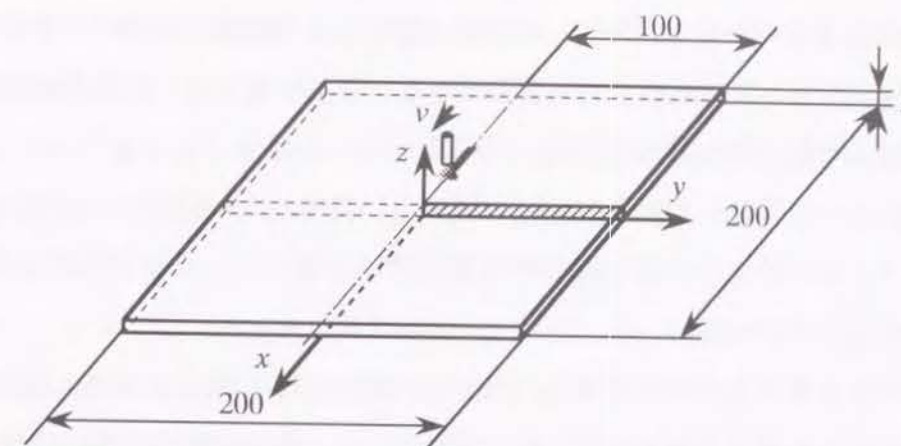


Fig. 7.3. Model for welding.

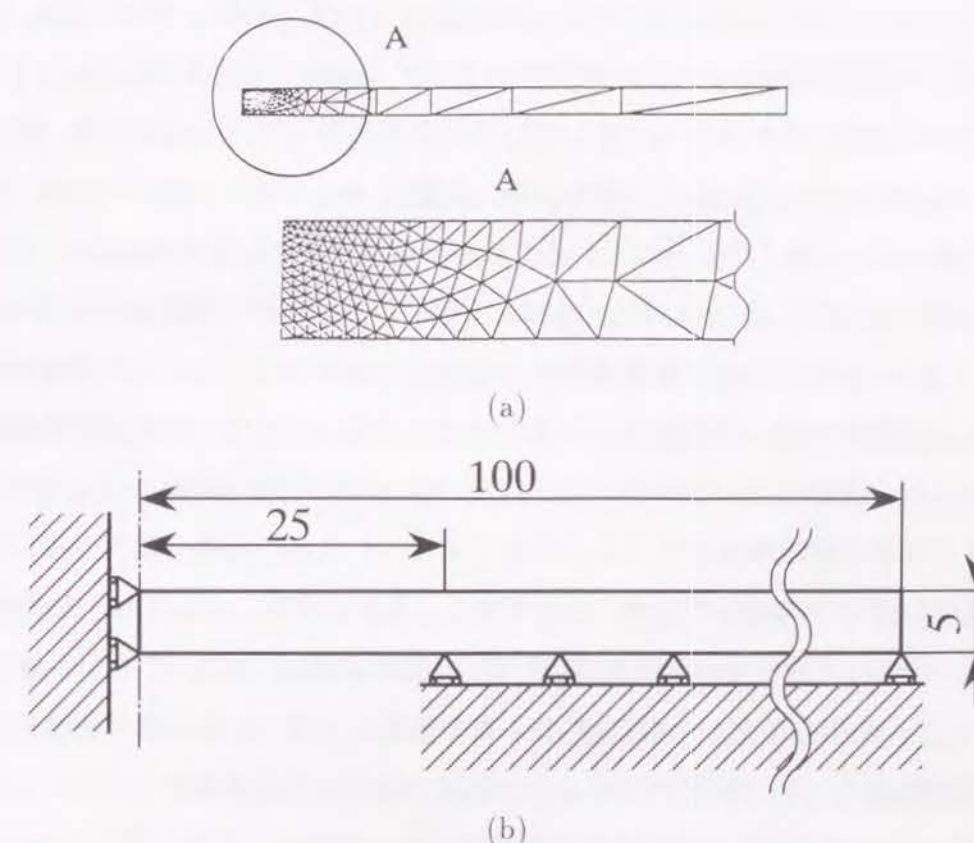


Fig. 7.4. Finite element mesh(a) and constraint(b).

Fig.7.5 は、計算によって得られた要素の変形過程を液相の体積分率 ξ_l とともに示したものである。変形量は、わかりやすいように y , z 各方向に実際の量の 10 倍にして表示してある。先に示したように、入熱に要する時間は 1.2s であるが、溶接棒の中心が解析対象

の真上を通過する 0.6s(Fig.7.5(b)) までは、加熱および溶融した部分が熱ひずみと変態ひずみによって膨張している様子が示されている。これに対して、加熱の最終段階である(c)においては、溶融部にわずかな凹みが生じ始めている様子が示されている。さらに、溶融部が凝固によって完全に消滅した(d)以降においても、この溶融中に生じた表面の変形が残っている。この結果からは、最終的な形状には溶融中に生じる変形が大きく影響をおよぼしていることがわかる。

要素分割の各節点の速度の変化を、先程と同様に液相の体積分率 ξ_l 、表面形状ともに示したものが、次に示す Fig.7.6 である。本解析では、時間の経過と共に上面から z 軸を中心として所定の範囲に熱が加えられるが、それによる溶融が中心部の上面から広がるにつれて、速度分布にも変化が起きていることが示されている。固相の領域に関しては、0.3 s(Fig.7.6(a)) では溶接板を上方に凸に変形させるように分布しているが、(b) から (c) では母材を右方向に移動させるように分布している。これに対して (d) 以降では、速度分布は中心 ($y=0$ mm) に向かっていることがわかり、これによって加熱の終了のために溶接された範囲が収縮していく様子が示されている。液相の領域である溶融部の速度は、(b) までは上向きであるが (c) では下向きに転じている。とくに、固相との速度分布との比較でみると、Fig.7.6 の (a) から (b) の溶融範囲が拡大していく段階では、上方へと速度が明らかに増していることがわかる。これに対して凝固が始まる (c) では、液相と固相の境界で速度が下方へ大きく変化している様子が示されている。この溶融・凝固によっては、液相と固相の境界で速度の跳躍条件があることを第2章で示したが、液相の速度分布に対してその影響が大きい様子が本解析で示すことができる。液相の変形に対しては、母材(固相)の変形と溶融・凝固による相間の密度の差の影響(変態ひずみ)が大きいことが示されている。

Fig.7.7 には、変形を考慮した温度 T の分布の変化を示す。溶接の進行と共に中心部から温度上昇が始まり、その範囲が広がっていく様子がここでは示されている。加熱の中心においては、(a) から (b) までにかけては温度が上昇している。これに対して (c) では、温度が上昇している範囲が広がっているにもかかわらず、中心部では温度が低下していることがわかる。本解析では液相でも熱ひずみを考慮しており、先程考察した凝固による変態ひずみに加えて、この中心部での温度低下が Fig.7.5 でみられた中心部の凹みの一因になっているものと考えられる。さらに、Fig.7.6 で示した速度分布の計算結果と比較すると、固相の速度で上向きであった中心 ($y=0$ mm) 付近の速度分布が 1.2 s(同図(c)) で右方向に変

化したのは、Fig.7.7 で解析対象の下面の温度が上昇し始めた時刻と一致する。つまり、0.6 s 以前の板全体の変形は、板の上下面での温度差に依存したものであったと考えられる。溶融部との関連では、液相線温度 ($T_l = 1550$ °C) を越えた温度範囲では温度勾配が小さいのに対して、その周辺では大きくなっている。これは、溶融あるいは凝固している部分では、潜熱の影響で温度勾配が大きくなるためであると考えられる。

Fig.7.8 から 7.10 までは、溶接線方向の応力 σ_x 、溶接線直角方向の応力 σ_y 、板厚方向の応力 σ_z の各分布の変化を示す。溶接線方向の応力 σ_x の分布を示した Fig.7.8 では、溶融部の周辺ではかなり大きな圧縮応力が生じているが、溶融部ではほぼ 0 であることが (a) ないし (c) から観察される。これは、固相内では温度上昇による熱膨張が周辺に拘束されるために圧縮応力となるが、溶融部では固相に比べて変形しやすいために、変態ひずみや熱ひずみによる新たな応力が発生しないばかりではなく、それまで存在した応力の主因であった拘束も解放されるため、応力が小さくなっているものであると考えられる。しかしながら、温度がほぼ均一となった (d) 以降では、溶融した周辺で引張応力が発生しており、それも (e) では降伏応力に達する大きな値となっている。とくに、その最大値は、溶融部ではなくむしろ溶融部の周辺部分に分布する結果となっている。これは、先に述べたように、溶融池が存在している時の溶融部周辺では降伏応力に達する応力が生じ、この時の大きな非弾性ひずみの発生とともに硬化が進行するが、溶融した範囲では溶融以前に硬化した部分が凝固過程で再結晶し、溶融部周辺より硬化の影響が小さくなっているためと考えられる。

溶接線直角方向の応力 σ_y の分布を示した Fig.7.9 では、溶融部周辺では先ほどと同様に圧縮応力が生じているが、溶融部では応力の値がほぼ 0 となっている。また、(a) ないし (b) においては、その圧縮応力とつり合うように溶融部の下部で引張応力が生じている。この応力が、Fig.7.5 で観察された溶接板を凸に変形させた要因であると思われる。しかしながら、溶接が終了した (d) 以降においては、それまでにみられた板厚方向の温度差がないためか、応力は全域にわたって比較的小さな値となっている。板厚方向の応力 σ_z の分布を示した Fig.7.10 では、溶接過程を通じて溶接終了後まで、ほぼ全域で比較的小さな応力しか生じない結果となっている。これは、溶接部に急な温度勾配が生じて、板厚が 5 mm と比較的小さかったために、温度が上昇した部分が周辺に拘束されることが少なかったためであると考えられる。

ここまで示したように、第3章とそれを実際の解析に適用するために本章で示した方法によって、溶融・凝固過程の詳細な考察が可能となる。とくに、溶融部で生じる変形とそれが最終的な形状におよぼす影響、あるいは溶融部とその周辺部での残留応力発生過程などの非弾性解析、未溶融部の変形と溶融・凝固による変態ひずみの影響を考慮した溶融池の速度分布など、従来の解析手法では考察できなかった材料の溶融・凝固過程の現象を、これまでにない総合的に考察することが可能となった。

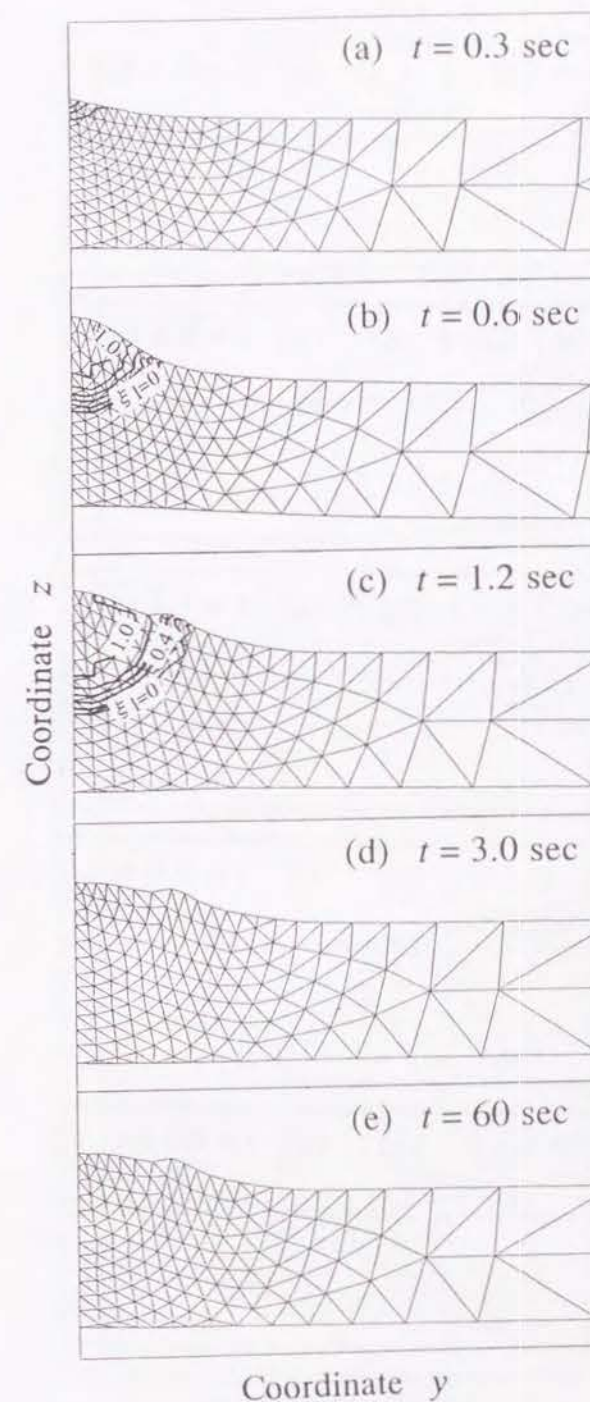
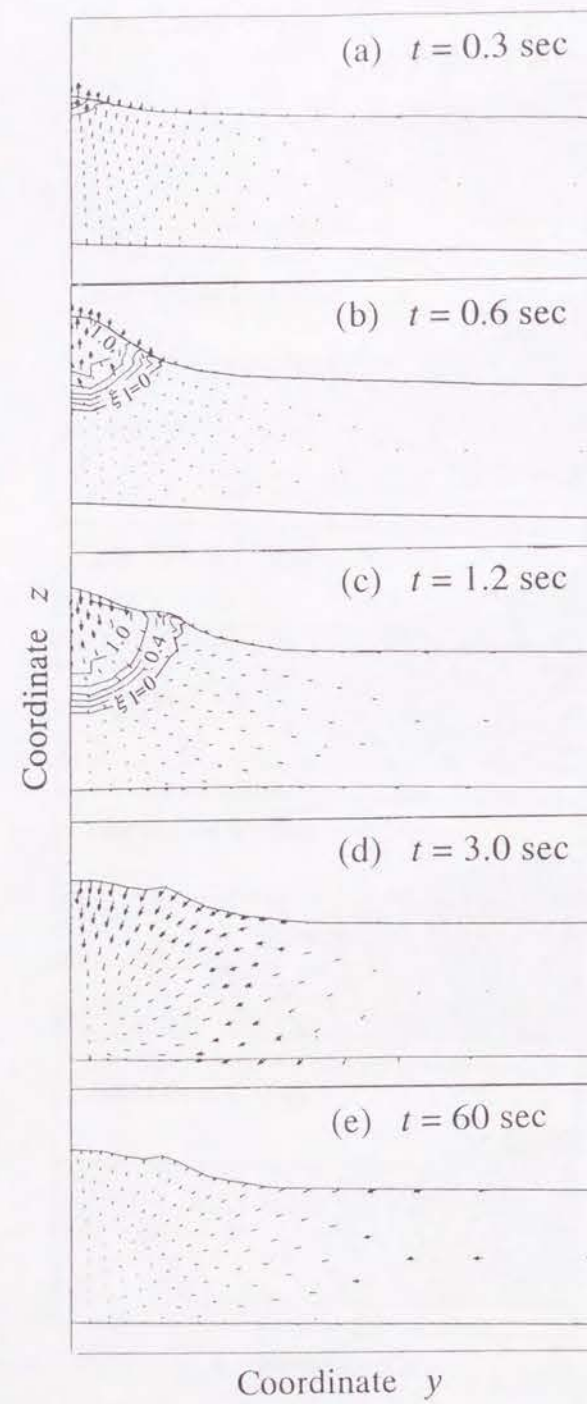
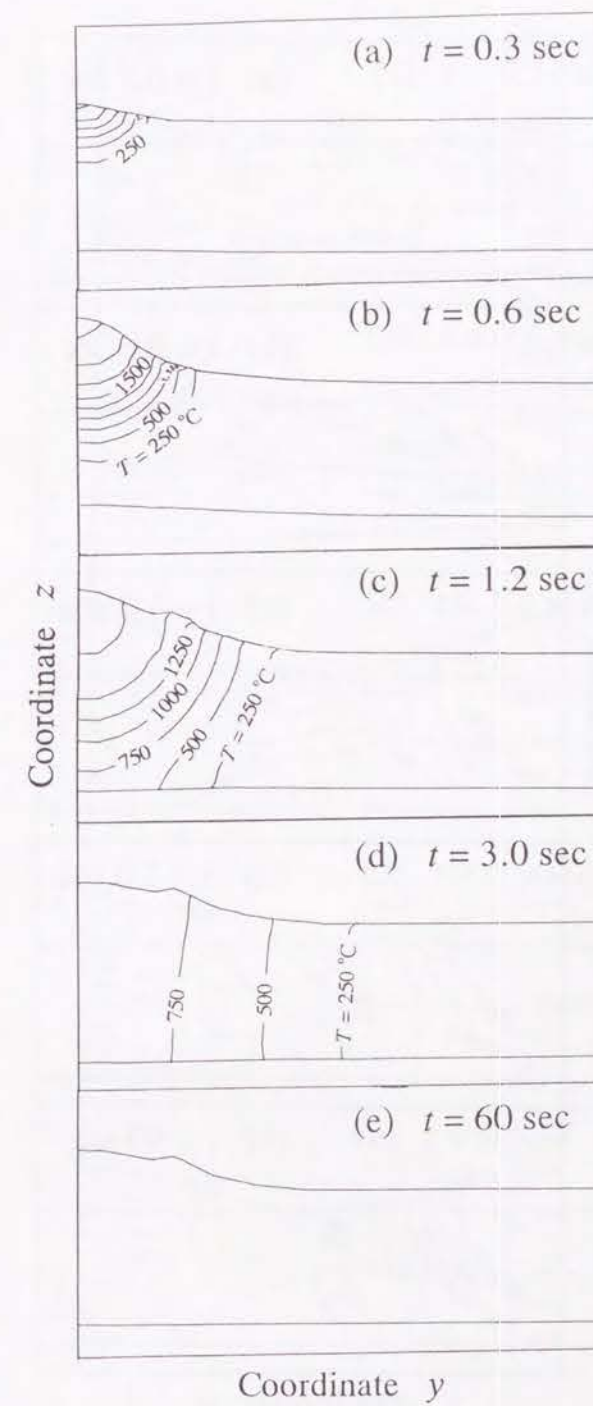
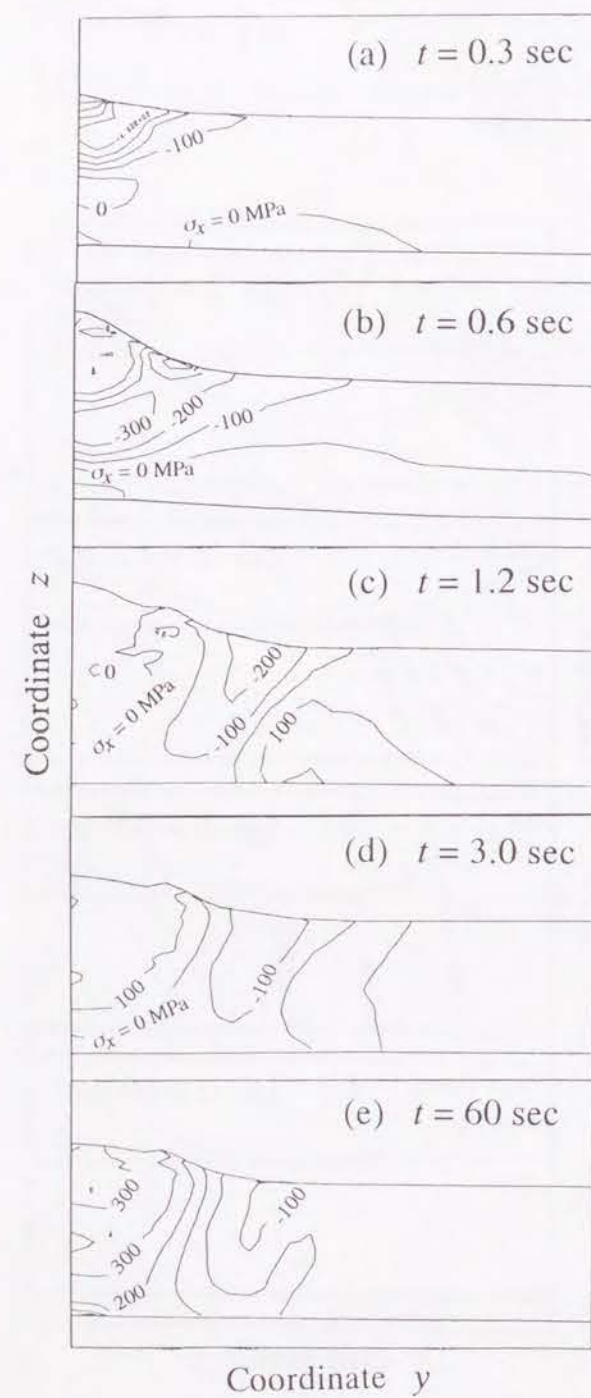
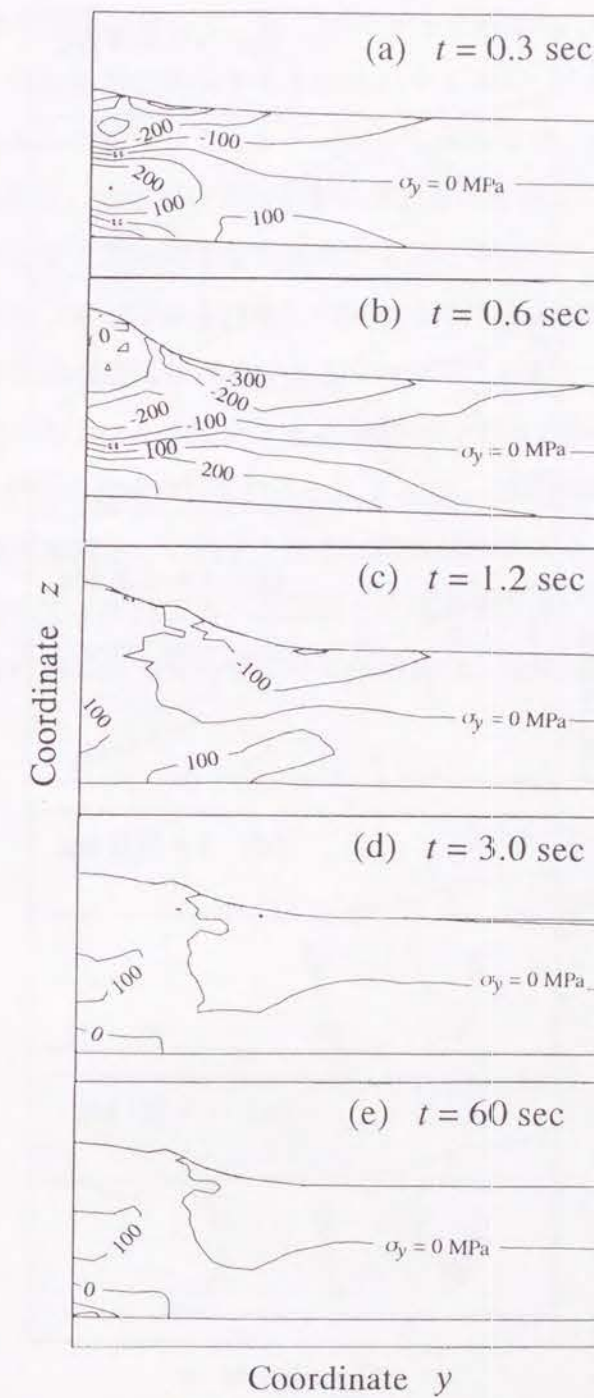
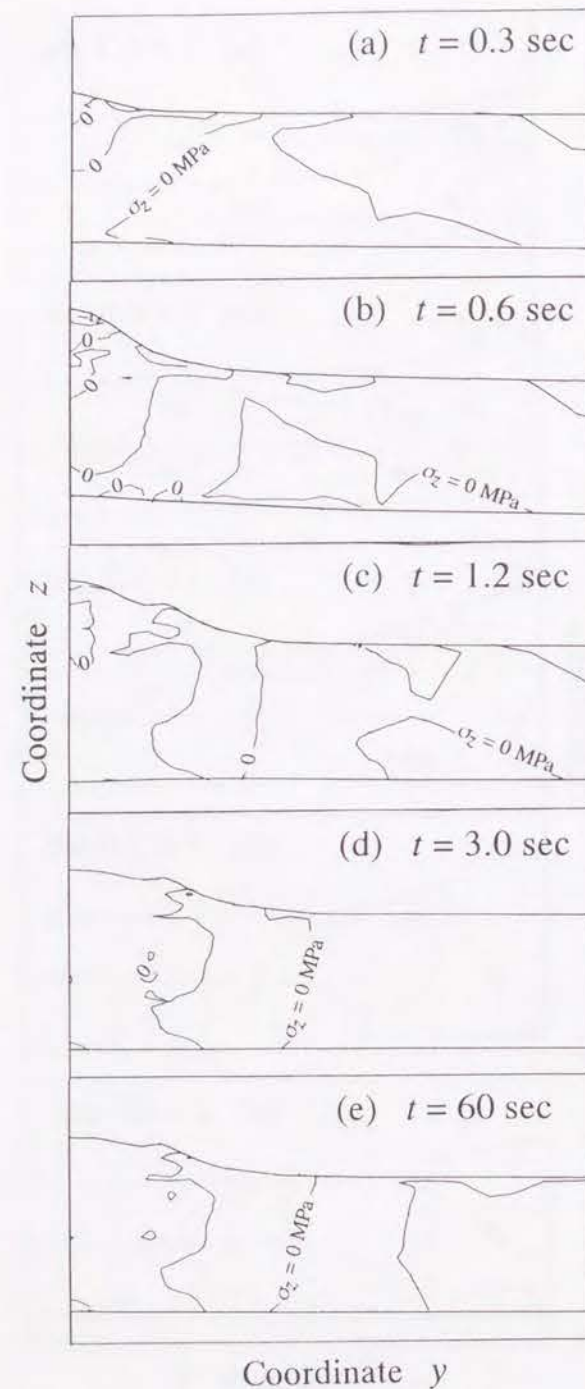


Fig. 7.5. Deformation of FE mesh.

Fig. 7.6. Change of distribution of velocity v_i .Fig. 7.7. Change of distribution of temperature T .

Fig. 7.8. Change of distribution of stress σ_x .Fig. 7.9. Change of distribution of stress σ_y .

Fig. 7.10. Change of distribution of stress σ_z .

7.4 結言

適用できる力学的な解析手法によって1つの系を複数の領域に分け、しかもその境界が移動する場合の力学的な問題に対して、第2章で示した基礎式と第3章で示した構成式、有限要素式を実際の工学的問題に適用する方法を示すと共に、これを材料の溶融・凝固を工学的に利用する溶接過程の数値シミュレーションに適用した。とくにここでは、固相領域で熱弾粘塑性有限要素式、液相領域では熱剛粘塑性有限要素式による応力/ひずみ解析を行い、溶融・凝固過程における材料挙動を表現することを試みた。

その結果、前章まで示してきた熱と応力/ひずみ、組織解析に加えて、溶融状態にある部分の速度を含めた材料挙動の解析が可能であることが示された。とくに、溶融部の挙動によって製品の最終形状や応力分布が変化する溶接問題については、従来困難であった液相領域の熱・力学的材料挙動の表現が行えたことによって、今後の溶接過程の溶融・凝固現象に付随する種々の問題の論議が、これまで以上に現象論的に行うことが容易となった。しかも、溶接以外でも従来では困難であった固相と液相の共存系の、相境界が移動する問題の熱や速度、さらに最終的な応力分布までの変化過程を、総合的に解析することが可能となった。

第8章

溶着金属の成長を考慮した 溶接過程の固相-液相の連成解析

8.1 緒言

ここまで本論文では、固相内の相変態や溶融・凝固過程の力学問題など、溶接過程に生じる種々の現象を論じるための方策を示してきた。また、それと同時に示してきた方法を溶接過程のシミュレーションに適用してきたが、それらの数値解析は溶加材 (deposited metal) を無視して行うものであった。溶接方法としては、溶加材を必要としない TIG (tungsten inert gas) 溶接、レーザー溶接などもあるが、GMA (gas metal arc) 溶接に代表される金属を供給する方法も広く用いられている。この溶加材を伴う溶接過程を力学的に論じるためには、溶融・凝固過程の力学問題に加えて、外部から物質が供給される過程について、解析に必要とされる関係式を示す必要があった。このような状況において、この過程を力学的に論じた報告としては、最終的な形状を予め与えて解析する 경우가多く [64]-[67], [82]-[83], 金属供給を考慮している場合でも流れの解析のみを行い、問題となる残留応力や変形を論じているものはなかった。しかし本論文では、物質供給によって外部境界で物質点と境界の速度が異なる解析モデルを第2章において示すとともに、これと保存則から解析に必要な基礎式について示しており、また第3章においては、相変態を考慮した熱弾粘塑性構成式を用い、先の解析モデルをもとにした有限要素式の導出方法について示している。このことは、現在まで困難であった金属が供給される溶接過程の数値解析が可能となったことを示すものである。

そこでこの第8章では、物質供給によって外部境界で物質点と境界の速度が異なる解析モデルと、そこから得られた有限要素式などの関係式の応用として、これらを溶着金属が供給される溶接過程のシミュレーションに適用した結果を示す。溶接モデルとしてはこれまでと同様にビードオンプレートを考え、これを平面ひずみでモデル化、材料はSUS304鋼として扱った数値解析を行う。解析に際しては、まず平面ひずみの有限要素式について示した後に、具体的な解析条件について説明することとする。さらに、得られた溶接過程と最終状態の計算結果について論じるとともに、溶加材の供給過程の溶接の力学的材料挙動について論じることとする。

8.2 数値解析理論

8.2.1 解析の流れ

外部供給を考慮した過程の解析方法については既に第3.4.4節で示したが、本章も温度と応力/ひずみ、組織の連成解析の概念を基本とした上で、Fig.8.1に示す構成によって実際の解析を行う。

とくに成長領域の取扱いに関しては、予め要素体積のしきい値として V_{\max} を与えておき、まず式(2.33)で定義された $\rho(v'_i - v_i)n_i = \zeta_i n_i$ を基本として境界の成長量を明らかにし(Fig.8.2(a))、材料供給を受けた要素が V_{\max} を越えていない場合は表面形状を式(2.33)を満足するように変更するものとし(Fig.8.2(b))、一方 V_{\max} を越えた場合はやはり式(2.33)を満足するように新たな要素を表面で追加(Fig.8.2(c))した上で、さらに応力/ひずみ解析を行うことによって系全体の変形過程を計算するものである。

また変形の解析については、第3.4.4節で示したように固相が支配的であると考えてこれを先に計算し、さらに成長した領域を含めた液相の解析を行うもので、ここでも応力の内部境界における条件は次のステップで考慮したものである。この様にするによって、各ステップでの演算時間が大きく軽減され、同時に境界値問題の解として満足できる解が得られるものである。各ステップ毎の収束計算に関しては、温度と組織の解析の間のみで行っている。

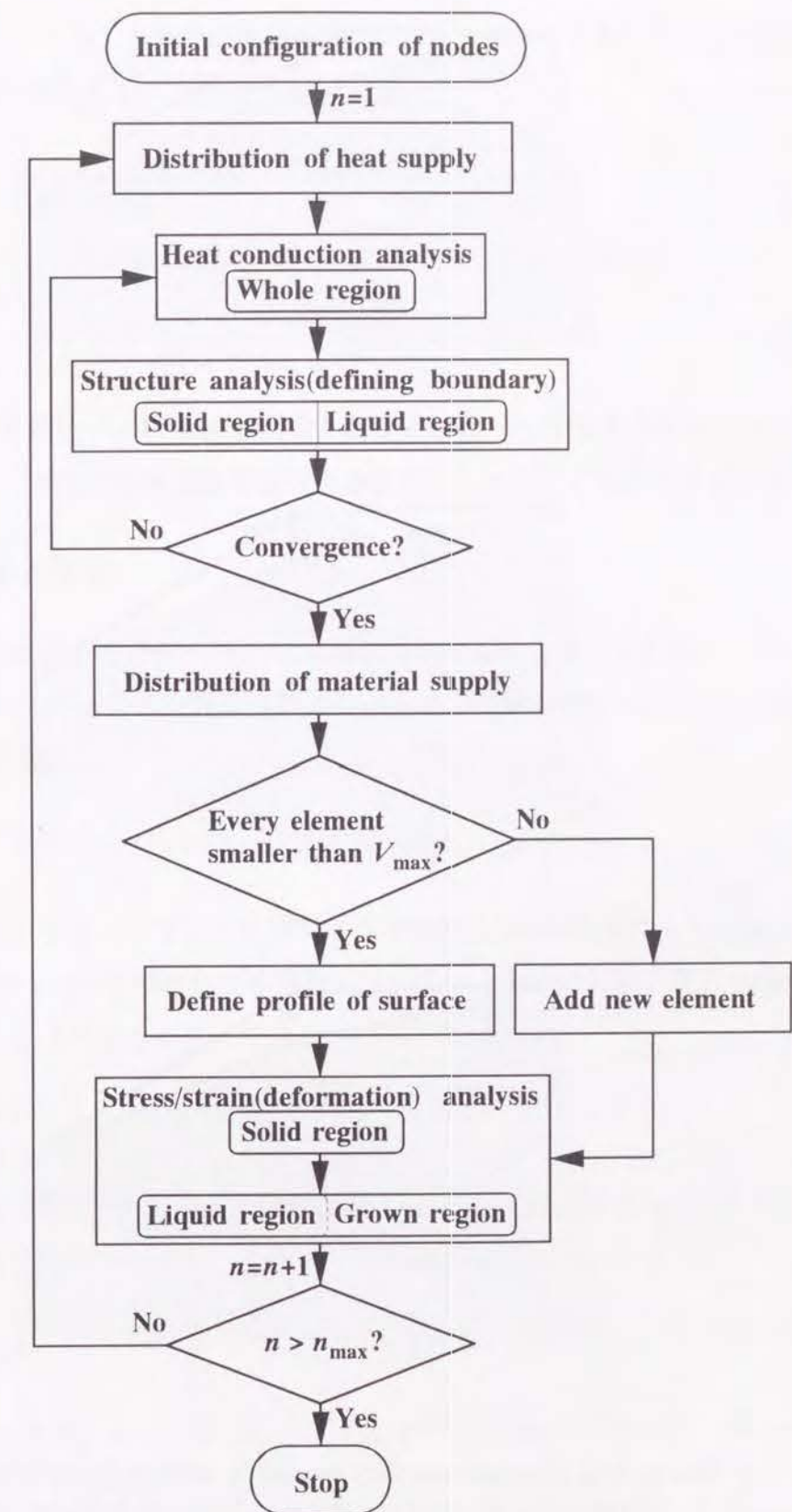
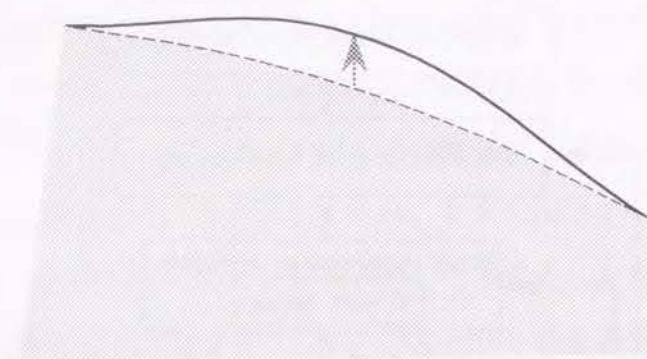
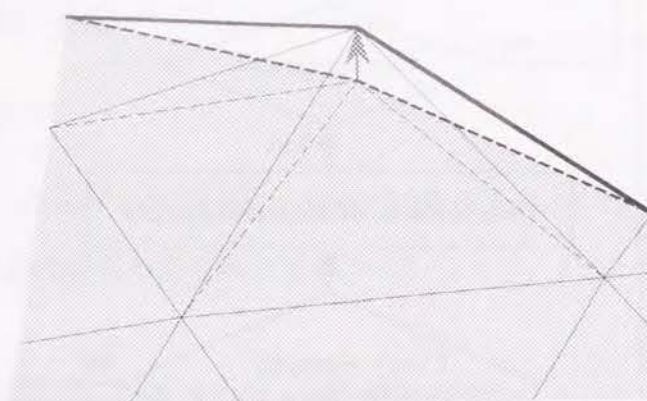


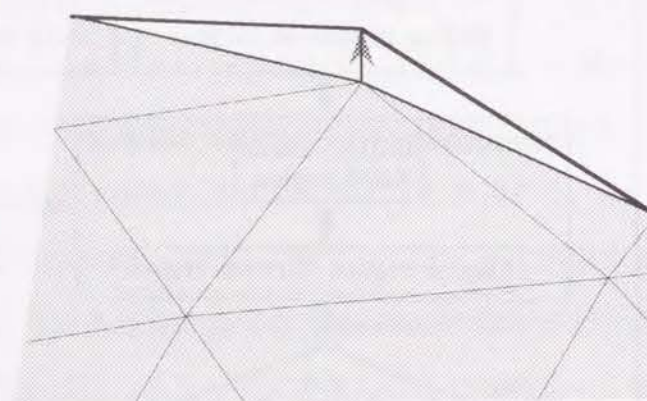
Fig. 8.1. Flow chart for calculation.



(a)



(b)



(c)

Fig. 8.2. The growth of outer boundary caused by material supply(a) is modelled by profile fitting(b) or addition(c) of elements in the simulation of welding process.

8.2.2 温度と相変態の解析

温度分布の算出については、本論文の数値解析にこれまで適用してきた方法と同様に、変態の潜熱を考慮に入れた式(5.1)に示す熱伝導方程式

$$\rho c \dot{T} - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} - \rho l_i \dot{\xi}_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \rho \dot{\gamma} = 0, \quad (8.1)$$

を全領域に適用することとし、これにより得られた温度分布とてこの法則

$$\xi_i = \frac{(T - T_s)/m_s}{(T_1 - T)/m_l + (T - T_s)/m_s}, \quad (8.2)$$

から得られる液相の体積から、相境界を決定することとした。また本章の解析においても、Fig.7.2 に示すように、半溶融領域は液相領域に含まれるものとして扱うこととした。

8.2.3 応力/ひずみ解析

応力/ひずみ解析に関しては、第6, 7章と同様に問題を平面問題として扱うこととして演算時間の軽減を図っている。構成関係としても、本論文の解析で既に用いている相変態を考慮した熱弾粘塑性構成式

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} + \dot{\varepsilon}_{ij}^T + \dot{\varepsilon}_{ij}^m, \quad (8.3)$$

を考え、この関係を用いて平面ひずみの条件下で有限要素式の定式化を行っている。応力/ひずみ解析の液相領域と固相領域の区別の基準についても、ここでも第7章と同様に降伏応力 σ_y の値を考え、以下のように扱っている。

$$\sigma_y = \begin{cases} \sigma_{y0} + H' \bar{\varepsilon}^{vp} & \text{in } V_s \\ 0 & \text{in } V_l \end{cases} \quad (8.4)$$

さらに、第2, 3章の結果を用いると、固相領域 V_s について平面ひずみの条件下での有限要素式が第7章と同様に

$$[K]\{v\} = \{\dot{f}^t\} + \{\dot{f}^b\} + \{\dot{f}^T\} + \{\dot{f}^m\} + \{\dot{f}^{vp}\}, \quad (8.5)$$

なる関係が得られる。また、ここでも $[K] = \sum_V \int_{V_e} [B]^T [D_e] [B] dV$ であって、 $[D_e]$ は平面ひずみの弾性マトリックスとなる。

さらに液相領域 V_l に関する有限要素式は, penalty 数 $\bar{\lambda}$ を用いて第3章の式 (3.90) と同形の

$$([\hat{D}] - \bar{\lambda}[\hat{E}])\{v\} = \{f^l\} + \{f^b\} + \{f^T\} + \{f^m\}, \quad (8.6)$$

となる. ただし, ここでも

$$[\hat{D}] = \sum_V \int_{V_e} 2\mu[B]^T[C][B]dV, \quad (8.7)$$

$$[\hat{E}] = \sum_V \int_{V_e} [B]^T\{A\}\{A\}^T[B]dV, \quad (8.8)$$

を用いることとなる.

8.3 計算と考察

本章で示してきた関係式を用いて, 溶融金属が供給される溶接過程のシミュレーションを行うために, 計算を行うための条件および計算結果を示すとともに, さらに計算結果を用いて溶加材を考慮した溶接過程の力学的な材料挙動について論じることとする.

8.3.1 溶接モデルと計算条件

溶接モデルとしては, ここまでと同様にビードオンプレートを考えるが, ここでは溶加材を考慮した溶接過程を解析することを目的として, 熱ばかりではなく解析対象表面から

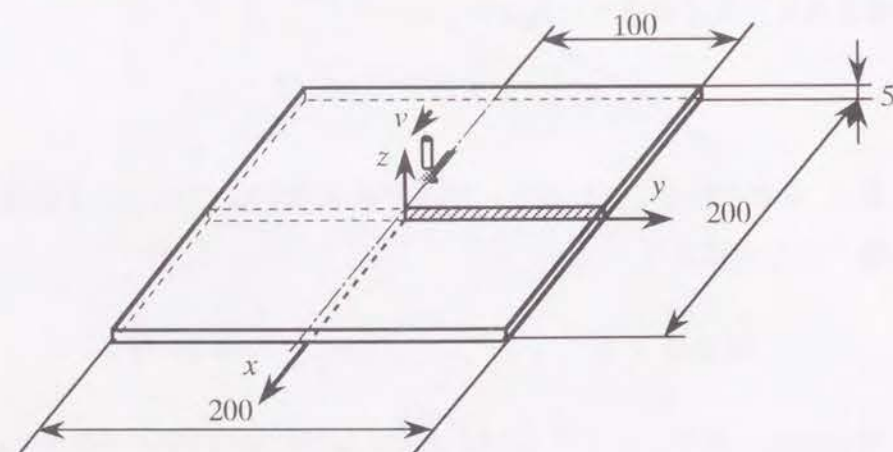


Fig. 8.3. Model for welding.

8.3. 計算と考察

母材と同種の材料を供給していく形式を想定した. 計算に用いる溶接モデルは Fig.8.3 に示す形状とし, 斜線部で示すような溶接線に対して直角な平面の半分のみを対称性から解析対象とした. ここで, 要素分割は節点 169, 要素 278 を用いて作成し (Fig.8.4(a)), 力学的には平面ひずみ問題として考えることとして, 力学的拘束条件については Fig.8.4(b) に示すものを適用した. 熱的な境界条件としては, 中心線 ($y = 0\text{mm}$) 以外の外界と接する境界において熱伝達のみを考慮し, 雰囲気温度 $T_w = 20^\circ\text{C}$, 熱伝達率 $h = 20\text{W/m}^2\text{K}$ としている. 入熱に関しては, ビード幅は第6, 7章と同様に 6mm と考えているが, 本章では Fig.8.5 に示すような円筒形の分布を考え, これによって材料供給に関しては液相線温度 ($T_l = 1550^\circ\text{C}$) の材料を 0.1kg/m の量で, また熱が溶融した材料のみではなく Joule 熱としても供給されることを表現するため, Joule 熱による熱量は 100kJ/m を考えて, これらを解析対象上を通過している間のみ所定量が供給されるものとした. 送り速度としてもこれまでと同様に 5mm/s としているため, 溶接棒からこれらの材料・熱が供給されている

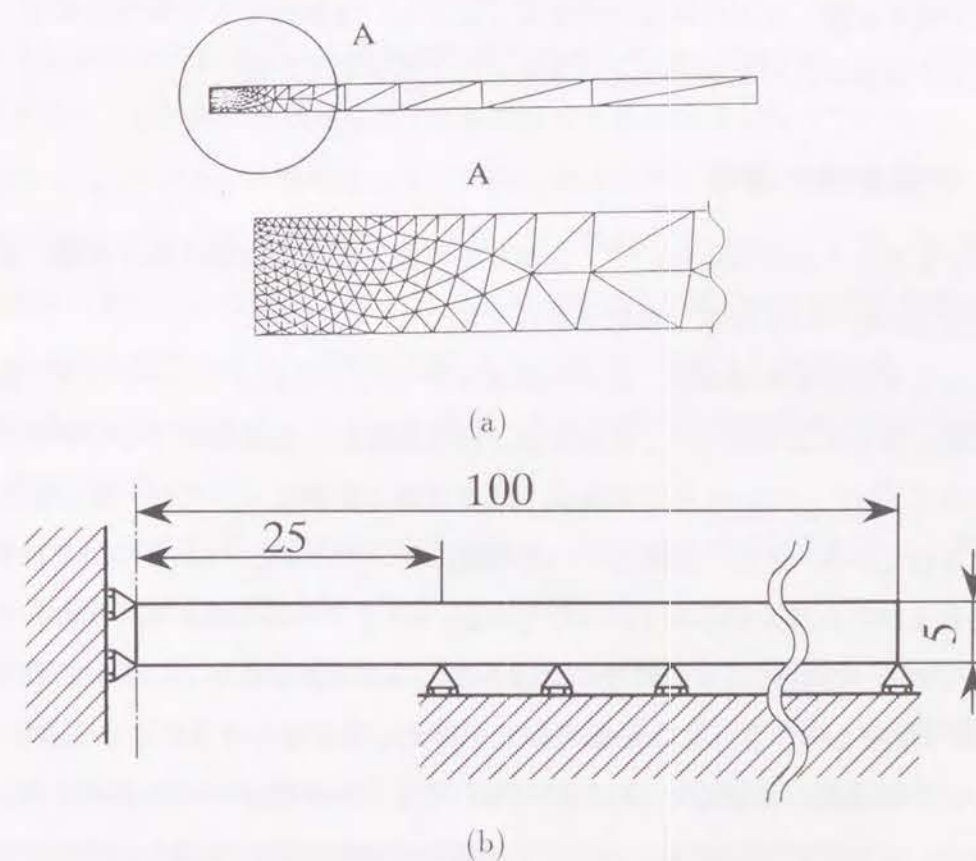


Fig. 8.4. Finite element mesh(a) and constraint(b).

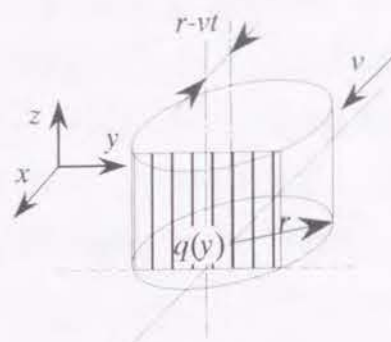


Fig. 8.5. Schematic of distribution of material and heat supply.

時間は 1.2s である。解析で対象とする材料としても、第 6, 7 章と同様に SUS304 を考えることとして、物性値も既に表示した値を用いることとした (Table 6.1)。相変態については、液相と固相間の溶融・凝固のみを考慮することとし、本解析でもその他の変態、例えば熱影響部などでの固相内の組織の変化は考えないものとしている。

8.3.2 計算結果と考察

本章で示してきた関係式を用いて、溶加材を考慮した溶接過程の熱と組織、流れおよび変形と応力分布について計算した結果を以下に示す。

計算による要素の変形過程を、液相の体積分率 ξ_l とともに Fig.8.6 に示す。溶接に要する時間は既に表示したように 1.2 s であるが、溶接開始から溶接棒の中心が解析対象上を通過し終わる 1.2 s (Fig.8.6(c)) までの間に、溶融金属の供給によってビードが成長していく過程が示されている。また、溶融している範囲についてみると、(a) については供給された溶融金属およびその周辺部のみであったものが、(c) までの間に母材まで広がっていく様子が示されており、これによって溶接における溶込み過程が示されている。これらの変化も (d) では終了しており、さらにこの過程の変形挙動が溶接中に大きいことも示されている。しかも、この溶融部が消滅した (d) 以降においてもこの溶融中に生じる表面形状がほぼ保たれており、溶接材の最終形状におよぼす溶融時の変形挙動の影響が大きいことが示されている。さらに、(b) から (c) の過程についてみると、この変形は半溶融領域 (mushy zone)

に比べて完全溶融領域 ($\xi_l = 1$) で顕著に生じており、これから溶接部の形状はとくに完全溶融領域が支配的であると考えることができる。

Fig.8.7 には、要素分割の各節点の速度の変化を液相の体積分率 ξ_l 、表面形状とともに示す。時間の経過と共に上面から溶融金属と熱が加えられるが、それによる溶融が中心部の上面から広がるにつれて、速度分布にも変化が起きていることが示されている。溶融金属は解析対象上面から z 軸を中心として所定の範囲に供給され、このとき (a), (b) に示されるように供給過程では表面速度、とくに上方への速度が他の部分に比べて大きいことが示されている。一方、この供給が終了しながら溶融部が存在している (c) についてみると、溶融部の速度が母材 (固相) に比べて大きいことが示されている。これは、液相が固相に比べて変形しやすいことと、両相の密度差に起因する固相と液相の境界での速度の跳躍の影響が大きいためであると考えられる。とくに (c) では、固相と液相の境界で速度が下方へ大きく変化しており、凝固によって相境界で生じる変態ひずみが、溶融領域の速度分布に与える影響が大きいことが示されている。凝固直後の (d) についてみると、速度は溶接部で収縮するように分布しているが、ある程度時間が経過した (e) では全体として収縮するように分布しており、この間の形状変化は (c) までに比べると少なくなっている。

Fig.8.8 に温度 T の分布の変化を示す。溶接の進行と共に温度上昇が中心部から始まり、その範囲が広がっていく様子が示されている。この加熱の中心においては、(a) から (b) にかけて温度が上昇しているのに対し、(c) では中心部では温度が低下している様子が示されている。全体の分布でみると、液相線温度 $T_l (=1550^\circ\text{C})$ を越えた範囲に比べ、その周辺の温度勾配は大きくなっている。これは、溶融・凝固過程の半溶融領域での潜熱の影響によるものと考えられる。

Fig.8.9 から 8.11 までは、溶接線方向の応力 σ_x 、溶接線直角方向の応力 σ_y 、板厚方向の応力 σ_z の各分布の変化を示す。

溶接線方向の応力 σ_x の分布を示した Fig.7.8 では、溶融部ではほぼ 0 であるが、その周辺では圧縮応力が生じている様子が (a), (b) から観察される。これは、溶融部では粘塑性ひずみが生じやすいために拘束が生じにくいのに対して、固相内は温度上昇による熱膨張が周辺に拘束されて圧縮応力となるためと考えられる。とくに、溶融過程においては、それまでの応力の主因であった拘束も解放されるため、溶融部の広がりと共に応力が小さい

範囲も拡大していくと考えられる。これに対して、温度がほぼ均一となって冷却過程にある(d)以降では、溶接部で引張応力が発生していく過程が示されている。

Fig.8.10には溶接線直角方向の応力 σ_y の分布を示す。Fig.8.9と同様に、溶融過程にある(a)、(b)において溶融部周辺で圧縮応力が生じており、ここでも溶融部は応力の値がほぼ0となっている。これに対して溶接が終了した(d)以降においては、応力は全域にわたって比較的小きな値となっている。これは、Fig.8.4(b)に示すように、本計算モデルでは y 方向の拘束がないためと考えられる。

Fig.8.11には板厚方向の応力 σ_z の分布を示すが、板厚が5 mmと比較的小さかったために、この溶接過程を通じて全域で比較的小きな応力しか生じない結果となった。

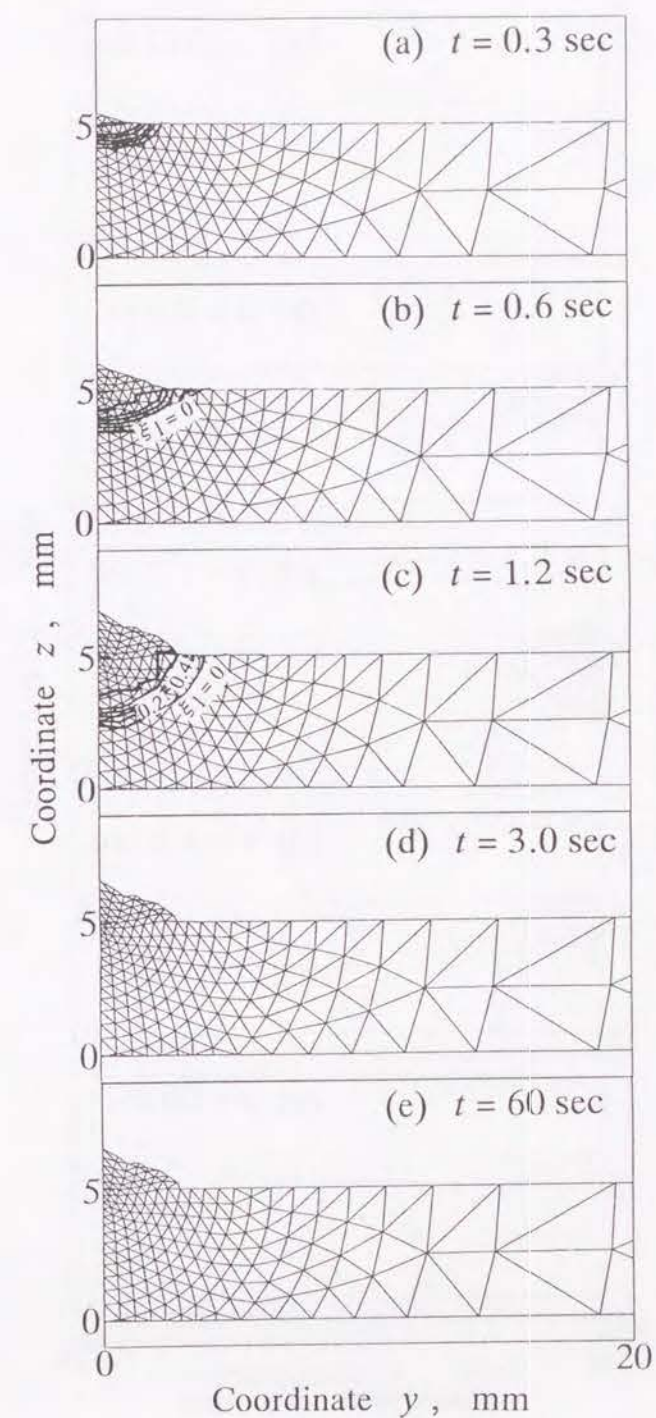
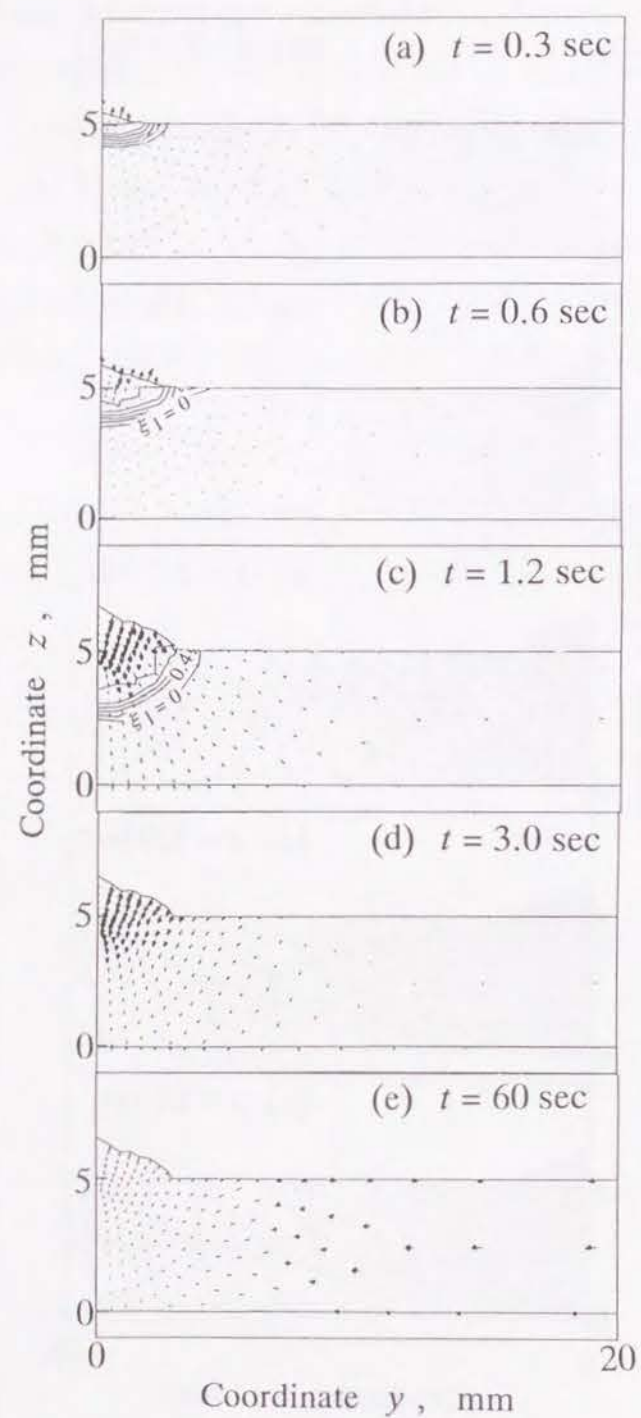
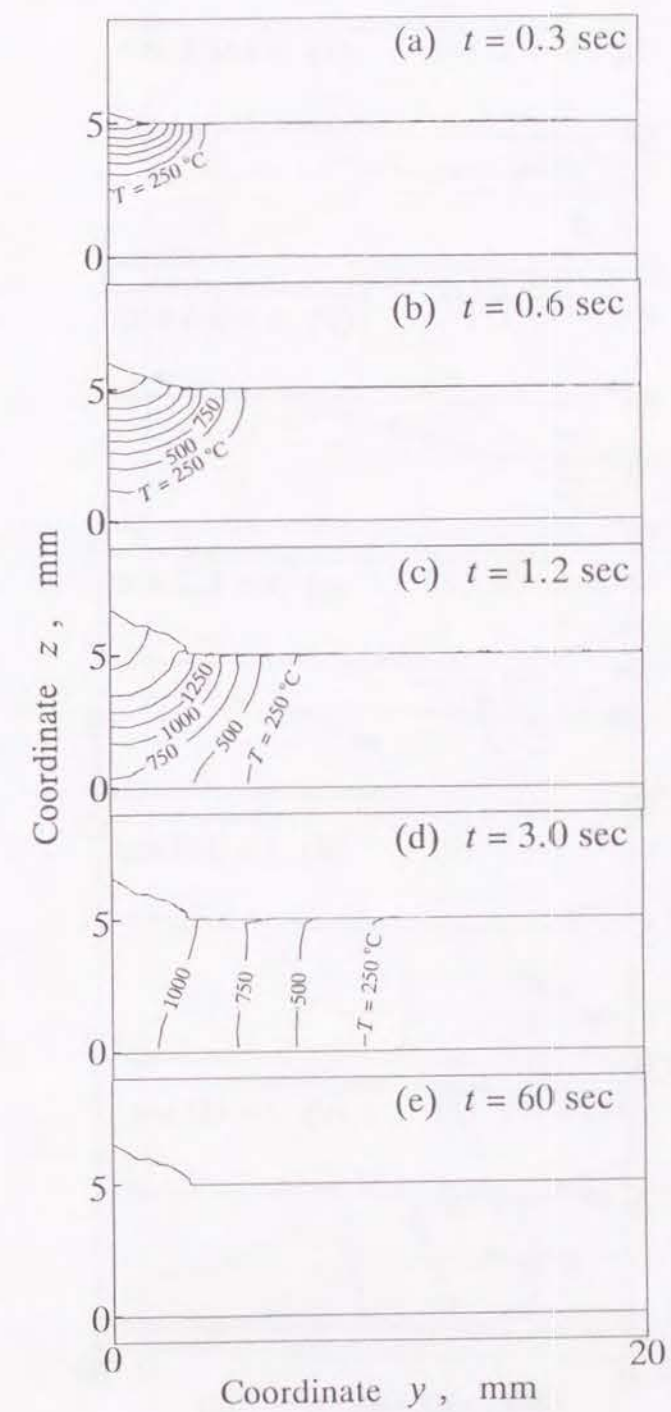
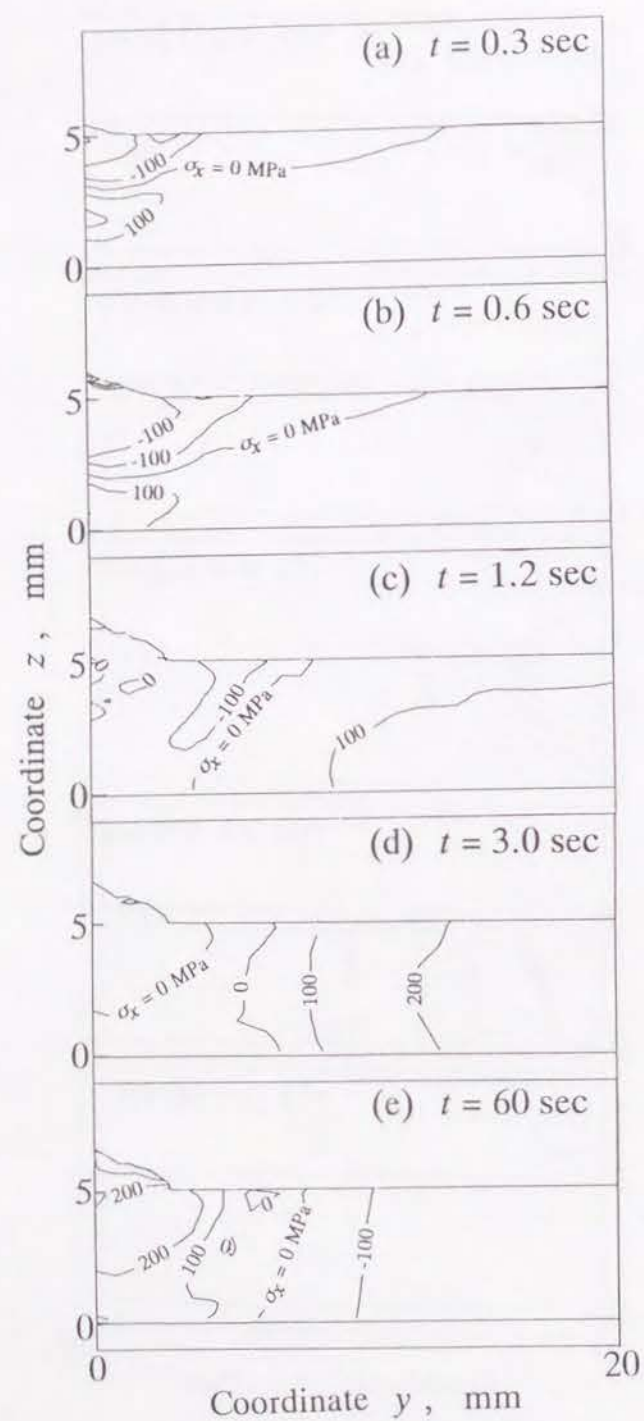
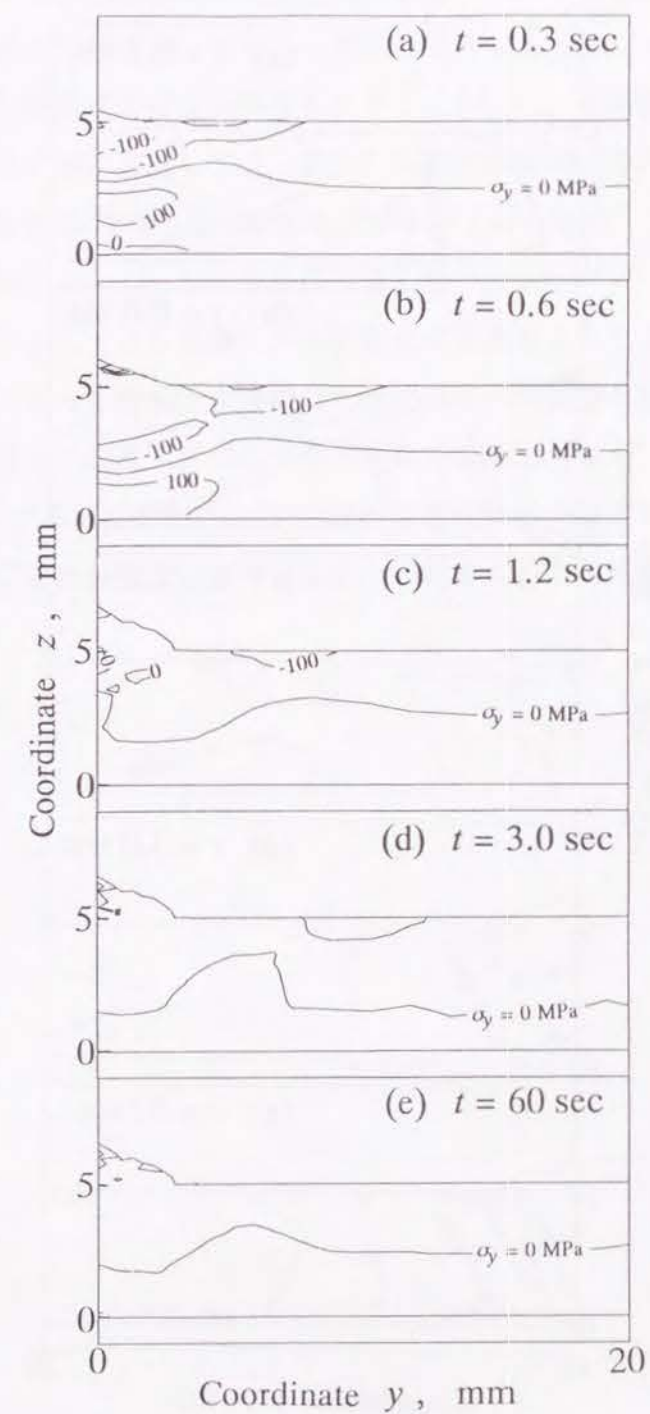
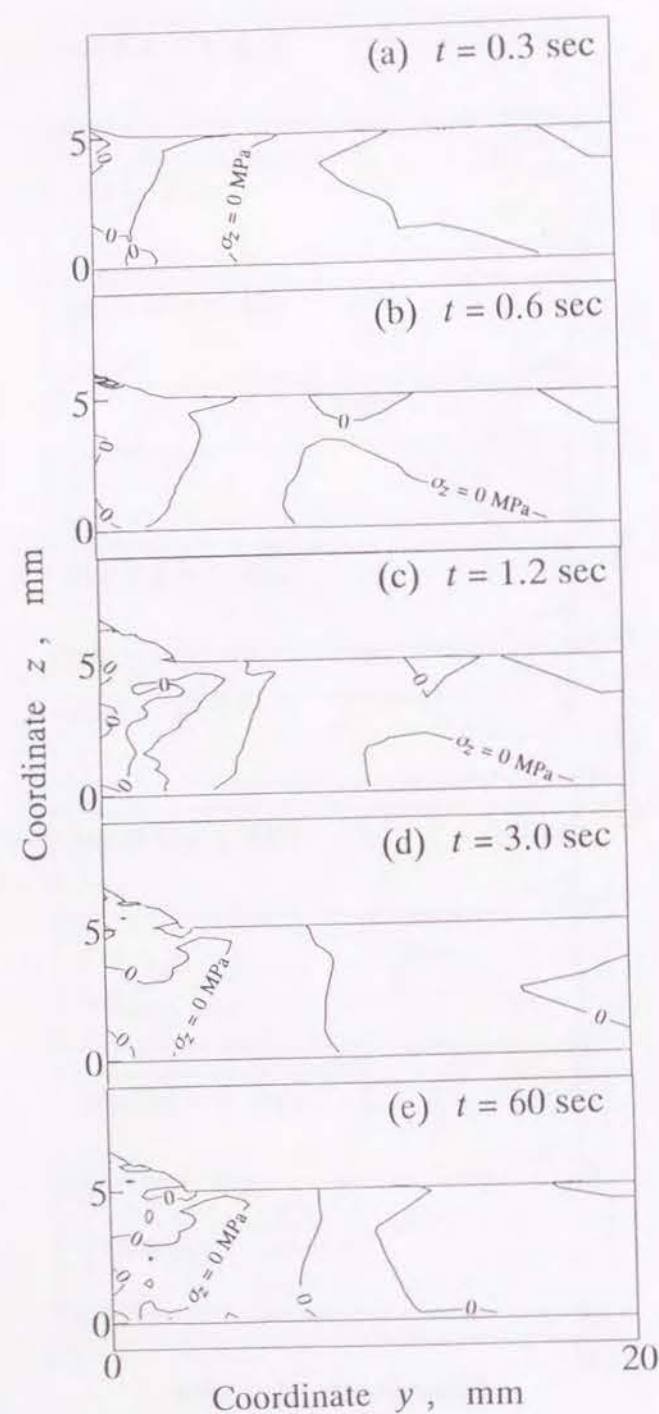


Fig. 8.6. Deformation of FE mesh.

Fig. 8.7. Change of distribution of velocity v_i .Fig. 8.8. Change of distribution of temperature T .

Fig. 8.9. Change of distribution of stress σ_x .Fig. 8.10. Change of distribution of stress σ_y .

Fig. 8.11. Change of distribution of stress σ_z .

8.4 結言

本章では、溶加材を用いる溶接過程の数値解析を行うことを目的として、一つの領域を内部に存在する相ごとの領域に分けて考える解析モデルであって、しかも材料供給によって外部境界上で境界と物質点の速度が異なるモデルにおいて、相変態を考慮した熱弾粘塑性構成式をこの解析モデルに適用して得られる有限要素式を用いて、各領域の相互関係を考慮しながら計算する固相-液相の連成解析の方法を示すとともに、これらによって溶加材を考慮した溶接過程のシミュレーション結果を示した。

その結果、本論文で示してきた基礎式、有限要素式を基本とした本章で示した計算方法によって、従来困難であった溶加材を考慮した溶接過程の解析が可能であることが示された。ここで示した結果は、溶接過程の材料挙動を良く表現しており、従来は溶加材の用いた溶接過程の応力/ひずみ問題の解析に固相-液相の連成解析が適用可能であることを示したばかりでなく、溶接過程の複雑な材料挙動を、これまで以上に現象論的に解析可能であることを示している。

第9章

結 論

9.1 材料の熱・力学的挙動と溶接

材料に対して熱に関係した何らかの処理を施すことによってその性質を変化させ、そのことによって目的の機能を有する製品を作り出す手法は無数に存在する。しかし、その過程を論述するために必要な学術的な成果は、近年盛んとなってきた高温下における材料強度の評価方法の研究、さらに歴史の長い常温での研究に比べると著しく少ないと言わざるを得ない。このような状況にある中、熱・力学的挙動を伴う工学過程として基本的な問題の1つである溶接を主題としながら、この熱的变化を伴う材料の挙動を力学問題と共に論じる手法の確立を目的として、本論文ではいくつかの考察を行ってきた。ここで主題とした溶接問題は、その数ある手法の中でも本論文では簡素なビードオンプレートを対象としてきたが、そこから得られる学術的成果は他の熱・力学的工学過程の解析に適用するためには何の不足もない、言い換えると溶接問題は数ある工学過程の中でも基本的かつ力学的に難解な問題の1つであるということが出来る。必ずしも本論文の成果のみでこの難解な溶接問題、しいては全ての熱・力学的工学過程が論じられるものではないが、従来示されていなかった論議を可能な限り含めることによって、現段階においては最新の成果であると考えられる。以下に本論文の成果をまとめることとする。

9.1.1 材料の相変態過程の熱・力学的解析

まず、第2章においては、熱力学的諸量とともに解析の基礎式を示しながら、その後の問題の解析を行う上で踏まえておくべき事項を示した。またここでは、領域を定義する境

界の速度が境界上の物質点の速度と異なる解析モデルを示し、このモデルを用いた変化の表現方法を示した。さらに、このモデルを基本としながら、領域が移動する内部で分割されている解析モデルを示し、この新たに示した解析モデルにおける変化の表現方法を示した。またここでは、この表現方法に用いて質量、運動量およびエネルギー保存則を適用することによって、内部境界で成立すべき条件を導出した。これらの条件は、密度差が存在する2相間で変態が生じる場合、その相境界で速度、応力および熱流束が不連続となることから、これらを速度、応力および熱流束の跳躍条件と呼ぶこととした。これら3つの条件は次に示す式で示される。

$$\rho_s v_i^s n_i^s - \rho_l v_i^l n_i^s = (\rho_s - \rho_l) v_i^l n_i^s, \quad (9.1)$$

$$\sigma_{ji}^s n_j^s - \sigma_{ji}^l n_j^s = \rho_s (v_i^s - v_i^l) (v_j^s - v_j^l) n_j^s, \quad (9.2)$$

$$q_i^s n_i^s - q_i^l n_i^s = \rho_s (e_s - e_l) (v_i^s - v_i^l) n_i^s. \quad (9.3)$$

ここで、式(9.1)が速度の跳躍条件、式(9.2)が応力の跳躍条件、そして式(9.3)が熱流束の跳躍条件である。また、同様の条件としては、熱伝導問題と関連づけて移動境界問題を論じるために用いられてきた Stefan 条件があるが、これをここで示した熱流束の跳躍条件の式(9.3)から導出することによって、ここで示した解析モデルが移動境界問題を表現可能であることと、相境界が移動する過程の力学問題の境界条件としては式(9.1)-(9.3)を用いるべきであるとの考えを示した。また、外部から物質が供給されることによって、内部境界と共に外部境界でも境界と境界上の物質点の速度が異なる解析モデルについて、これに保存則を適用することによって式(9.1)-(9.3)に示す跳躍条件を導出し、巨視的な問題が異なる場合でも内部で成立すべき局所的な条件は同様であることを示した。

続く第3章では、力学問題の解析を行うために必要な応力-ひずみ関係を表す構成式について、とくに溶融・凝固を含む相変態を伴う過程の解析を行うことを目的として、この過程を表現可能な Perzyna の粘塑性ひずみモデルを用いた相変態を考慮した熱弾粘塑性構成式を与えた。とくに、本論文の主題の1つである溶融・凝固問題をこの構成式が表現可能であることを示した。また、第2章で示した解析モデルにここで示した構成式を適用しながら、実際の数値解析に適用する有限要素式の定式化過程についても示した。ここでは、まず単領域において各相の体積分率から混合則によって解析に必要な物性値を算出する方法から、相変態を考慮した熱弾粘塑性有限要素式の導出を行った。さらに、材料の溶融状態

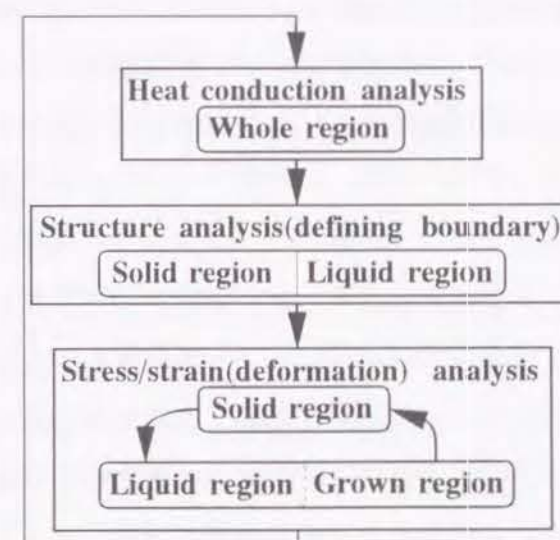


Fig. 9.1. Flow chart for calculation

の条件を考慮することで熱弾粘塑性有限要素式が導出できないことを示し、また弾性成分を無視した構成関係から相変態を考慮した熱剛粘塑性有限要素式を導出した。しかし、このどちらの有限要素式も溶融状態の材料挙動を考慮しながら残留応力の算出などができないことを補うため、第2章で示した分割された領域による解析モデルに相変態を考慮した熱弾粘塑性構成式を適用し、さらに固相と液相の条件と相境界の移動を考慮しながら有限要素式の導出を行って、固相領域で相変態を考慮した熱弾粘塑性、液相領域で相変態を考慮した熱剛粘塑性有限要素式の定式化を行った。さらに、この定式化の結果と連成解析の手法を基本としながら、実際に計算を行うための手順についても示した。同様の内容については、物質供給によって境界成長を伴う解析モデルを用いても示した。Fig.9.1にはそこで示した計算手順のフローチャートを示す。これは、有限要素式の定式化過程で示しているが、応力/ひずみ解析では支配的であるという理由で固相領域について先に計算を行い、さらに液相領域の計算を行うというものである。ここで、有限要素式の定式化過程では内部境界の条件式の中で式(9.1)についてしか用いられなかったため、式(9.2)を満足させるためにさらに固相領域の計算を行う必要があることを示した。また、式(9.3)については

温度および組織解析で満足される性質のものである。さらに、Fig.9.1 に示す計算手順をもとに、物質供給がない問題では応力/ひずみ解析で領域が成長する部分を無視する計算方法で、加えて液相の材料挙動を詳細に論じない問題については、固相と液相領域を混合則などを用いて同時に計算することで解析が可能となるものである。これらの方法によって、溶融・凝固を含めた相変態を伴う過程の熱・力学的解析が可能となった。

9.1.2 相変態と溶接

相変態を考慮した溶接過程の解析を行うことを目的として、第4章ではこの過程で観察される組織変化とその表現方法について示した。ここではまず溶接の本質である液相と固相の間での相変態について示し、これを状態図およびそこから得られるこの法則と関連づけて論じた。さらに、共析拡散変態について熱力学的考察を出発点として定式化し、組織履歴、温度、応力に依存した次に示す変態速度式を導出した。

$$d\xi_f = 4\pi(1 - \xi_f)v_r(t) \int_0^{r_{\max}} n_f(r)r(t)^2 dr dt. \quad (9.4)$$

また、これを加熱・冷却連続過程の相変態の解析に適用するため、変態過程の母相と生成相の関連についても論じることによって、変態過程で変化が逆行した場合の問題も解析可能とした。加えて、定式化の結果の妥当性を検討するため、パーライト変態とその逆変態であるオーステナイト逆変態について定式化の結果を用いて恒温変態線図を算出し、実験による変態曲線と比較して定式化の結果の検証を行った。これが加熱・冷却連続過程に適用可能であることは、第5章の溶接過程のシミュレーションに実際に適用することで示すこととした。

続く第5章では、溶接過程の材料挙動に固相内の相変態がおよぼす影響について考察を行うことを目的として、実際に温度と応力、組織の連成解析を行った結果を示した。とくに、固相内における相変態については各相間の明確な境界を定義することが困難な場合が多いため、各相の体積分率をもとに混合則によって各物性値を定義することとして解析を行った。その結果、オーステナイト逆変態とパーライト変態が同時かつ連続的に生じる過程の材料挙動の解析が行えることを示し、第4章で示した変態速度式が加熱・冷却連続過程に適用可能であることを示すことができた。また、炭素鋼の溶接過程および最終的な状態の材料に対する固相内の相変態の影響が大きいことを計算結果から示し、現在まで実験

9.1. 材料の熱・力学的挙動と溶接

を中心に行われてきた溶接の材料挙動におよぼす相変態の影響が、この溶接過程の連成解析によって表現可能であることが示された。

第6章では、組織変化が影響をおよぼす工学的問題の1つとして、オーステナイト系ステンレス鋼である SUS304 の熱影響部の組織変化を考慮した解析について示した。組織変化の観察を行うにあたっては、まず供試材についての組織観察を行い、さらに短時間の加熱・冷却による初期組織の変化について調べた。また、実際に溶接した試験片の組織観察結果を上述の実験結果と比較、検討した。この結果、加熱処理前に観察された針状組織を加工誘起マルテンサイト、加熱後の組織をオーステナイトとし、さらに観察された組織変化を加熱によるオーステナイト逆変態として、数値解析に適用することを目的として相変態のカイネティックスの表示を与えた。これらの結果を実際の溶接過程の解析に適用するにあたっては、溶融・凝固での固相-液相間での相変態に加えて、逆変態を固相内の相変態として導入することとした。その結果、溶接による組織分布が溶接部周辺で母材と異なることを示し、オーステナイト逆変態が生じる熱影響部の範囲が推定可能であることを示した。さらに、この範囲を応力分布と比較することで、溶接線方向に引張応力が存在する範囲と熱影響部が一致していることを示し、溶接割れに関する考察を加えるとともに、溶接部周辺の材料挙動が機械的特性におよぼす影響については、応力ばかりではなく組織変化の解析からも考察が可能であることを示した。

第7章では、溶接部材の機械的な性質に大きな影響をおよぼす溶融池の材料挙動を考慮しながら、製品の最終形状や応力分布を算出することを目的として、第2章で示した移動する内部境界を持つ解析モデルとこれによって第3章で定式化した有限要素式を用いて、実際に溶接過程のシミュレーションを行った結果を示した。計算の結果からは、従来困難であった溶融池の材料挙動を考慮しながら溶融部とその周辺部での残留応力発生過程を示すことができた。同時に、溶融部で生じる変形とそれが最終的な形状におよぼす影響、未溶融部の変形と溶融・凝固による変態ひずみの影響を考慮した溶融池の速度分布など、従来の解析手法では考察できなかった材料の溶融・凝固過程の現象が、本論文で示した方法によって総合的に考察可能であることが示された。

第8章では、物質供給によって外部境界で物質点と境界の速度が異なる第2章で示した解析モデルと、それを用いて第3章で定式化した有限要素式の応用として、これらを溶融金属が供給される溶接過程のシミュレーションに適用した結果を示した。ここで示された

結果からは、従来は無視されることが多かった溶接過程の溶加材について、固相-液相の連成解析によってこれを考慮した溶接過程の応力/ひずみ問題の解析が可能であることが示された。これによって、材料が供給されている過程の溶融部の変形や、それが最終的な形状におよぼす影響が解析可能となったばかりでなく、未溶融部の変形と溶融・凝固による変態ひずみの影響を考慮した溶融池の速度分布、溶融部とその周辺部での残留応力発生過程の解析など、相と温度、応力/ひずみなどの相互の関連も含めてた溶接過程が計算可能となった。

これらの結果、従来は報告例が比較的少ない相変態を考慮した溶接過程の数値解析が、本論文で示した解析モデルおよび有限要素法で可能であることが示された。とくに、加熱・冷却連続過程の固相内および溶融・凝固の相変態を考慮した上で、温度と応力/ひずみ、組織の詳細かつ総合的な評価が計算によって可能となった。このことは、従来実験によって行なう必要があった複雑な材料挙動の研究が計算によって可能になったことでもあり、溶接の評価を行う上で労力、設備を軽減できるばかりではなく、そこで生じる現象を現在まで以上に理論的に評価することが可能となった。

9.2 展望

本論文で示した相変態に関係する問題以外に、溶接過程には種々の現象が存在する。実際のアーク溶接等においては、力学的に考えるとさらに電磁力やシールドガスの影響などが挙げられ、さらに継手の強度に関連するものとしてアンダーカットや溶込みガスによる欠陥の発生、とけ込み不良などがある。これらを論じるためには、ここで示した熱・力学的問題に加えて物理的、化学的な要因を考慮する必要がある。しかし、これらの新たな要因を考慮するためには、何れにしても熱・力学的な基礎が確立されていなければ、その過程の材料挙動を現象論的に詳細に論じることは困難である。その意味で、本論文で示してきた内容は、今後の論議を進める上で基本となる内容となり得るものであって、しかも観察される熱・力学的以外の現象をさらに付加することが可能な内容であると、筆者は自負している。熱・力学的材料挙動の探求についても、依然として解決すべき主題は数多く残されているが、今後の熱・力学的材料挙動に関連する多くの研究の理解に、本論文が微力ながら役立てると期待していることをここに記し、本論文の巻末としたい。

参考文献

- [1] S.P. Timoshenko, *History of Strength of Materials*, (1953), McGraw-Hill (最上 武雄監訳, 川口 昌宏訳, 材料力学史, (1974), 鹿島出版会).
- [2] E. Melan and H. Parkus, *Wärmespannungen*, (1953), Springer.
- [3] 竹内 洋一郎, 熱応力, (1981), 日新出版社.
- [4] Y.C. Fung, *Foundations of Solid Mechanics*, (1965), Prentice-Hall.
- [5] 平 修二, 井上 達雄, 高橋 光夫, 多軸応力下の塑性疲れ (高温において組合せ引張圧縮・繰返しねじりを受ける場合), 機論, **32**-244, (1966), pp.1788-1792.
- [6] 平 修二, 井上 達雄, 吉田 紀元, 多軸応力下の塑性疲れ (高温において組合せ引張圧縮・繰返しねじりが位相差をもって加わる場合), 機論, **34**-258, (1968), pp.255-260.
- [7] 田中 喜久昭, 石崎 泰郎, 井上 達雄, 降伏曲面の温度依存性に関する研究, 機論, **38**-314, (1972), pp.2439-2446.
- [8] 井上 達雄, 長岐 滋, 河手 崇男, 繰返し温度変化をうける粘弾-塑性内圧円管の変形, 機論, **45**-399, A(1979), pp.1435-1442.
- [9] O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung, *The Finite Element Method*, (1971), McGraw-Hill (吉識 雅夫, 山田 嘉昭訳, マトリックス有限要素法, (1977), 培風館).
- [10] 上田 幸雄, 山川 武人, 有限要素法による熱弾塑性挙動の解析, 溶接, **42**-6, (1973), pp.567-577.

- [11] 井上 達雄, 田中 喜久昭, 青木 正人, ひずみ履歴を考慮した熱弾塑性応力の解析, 機論, **38**-314, (1972), pp.2490-2496.
- [12] 石崎 泰郎, 岡部 俊郎, 田中 喜久昭, 井上 達雄, 降伏曲面におよぼす温度と時間の影響について, 機論, **39**-326, (1973), pp.3010-3015.
- [13] 田中 喜久昭, 長岐 滋, 寺浦 栄一, 井上 達雄, 高温における多軸応力下の機械的ラチェット, 機論, **42**-358, (1981), pp.1685-1691.
- [14] B.D. Coleman and M.E. Gurtin, *Thermodynamics with Internal State Variables*, J. Chem. Phys., **47**, (1967), pp.597-613.
- [15] J. Kratochvil and O.W. Dillon Jr., *Thermodynamics of Elastic-Plastic Materials as a Theory with Internal Variables*, J. Appl. Phys., **40**-4, (1969), pp.3207-3218.
- [16] J. Kratochvil and O.W. Dillon Jr., *Thermodynamics of Crystalline Elastic-Viscoplastic Materials*, J. Appl. Phys., **41**-4, (1970), pp.1470-1479.
- [17] P. Perzyna, *Thermodynamic Theory of Viscoplasticity*, Adv. Appl. Mech., **11**, 1971, pp.313-354.
- [18] 長岐 滋, 井上 達雄, 内部変数を用いた粘弾-塑性体の構成式, 機論, **44**-387, (1978), pp.3705-3710.
- [19] 岸野 孝信, 長岐 滋, 井上 達雄, 鋼の焼入れにおける相変態, 熱伝導および弾塑性応力, 材料, **28**-312, (1979), pp.861-867.
- [20] 井上 達雄, 相変態を伴う金属材料の力学的挙動と連成効果, 機論, **50**-451, A(1984), pp.285-290.
- [21] 上田 幸雄, 福田 敬二, 応力除去焼きなましの力学問題に対する有限要素法の適用, 溶接, **44**, (1975), pp.902-908.
- [22] F.G. Rammerstorfer, D.F. Fisher, W. Mitter, K.J. Bathe and M.D. Snyder, *On Thermo-elasto-plastic Analysis of Heat Treatment Processes including Creep and Phase Change*, Comp. Struct., **13**, (1981), pp.771-779.

- [23] 井上 達雄, 田中 喜久昭, 変態を考慮した焼入れの解析, 材料, **22**-234, (1973), pp.218-223.
- [24] 橋本 信一, 井上 達雄, 山田 敏郎, 焼入れにおける残留応力と変形の解析, 材料, **27**-296, (1978), pp.422-426.
- [25] W.A. Johnson and R.F. Mehl, *Reaction Kinetics in Processes of Nucleation and Growth*, Trans. AIME., (1939), pp.416-458.
- [26] C.L. Magee, Phase Transformation, *The Nucleation of Martensite*, Phase Transformations, (1969), pp.115-156.
- [27] 山口 豪, 王 志剛, 井上 達雄, 歯車の浸炭焼入過程における炭素濃度依存性を考慮した温度, 組織および応力の解析, 材料, **33**-375, (1984), pp.1470-1476.
- [28] R.E. Smelser and O. Richmond, *Constitutive Model Effects on Stresses and Deformation*, In A.F. Giamei and G.J. Abbaschian, editors, Modeling and Control of Casting and Welding Processes IV, (1988), pp.313-328.
- [29] 高橋 邦宏, 連続体の構成式と熱力学的非局所効果, 機論, **58**-549, A(1992), pp.718-724.
- [30] 高橋 邦宏, 短時間履歴に依存する材料特性の熱力学的検討, 機論, **58**-544, A(1992), pp.1928-1933.
- [31] 小林 誠一, 高橋 邦宏, 微視的温度勾配を考慮した熱極性物質に対する Clausius-Duhem の不等式, 機論, **58**-548, A(1992), pp.592-598.
- [32] 小林 誠一, 志澤 一之, 高橋 邦宏, 微視的温度曲率を考慮した連続体の熱力学的考察, 機論, **59**-557, A(1993), pp.232-239.
- [33] 小林 誠一, 志澤 一之, 高橋 邦宏, 微視的温度曲率を考慮した連続体の基礎方程式系, 機論, **59**-559, A(1993), pp.868-875.
- [34] 王 志剛, 田中 誠, 井上 達雄, 物質移動を考慮した連続鑄造過程のシミュレーション (第1報, 温度場の解析), 機論, **53**-492, A(1987), pp.1735-1738.

- [35] 辰巳 尚久, 王 志剛, 井上 達雄, 連続鋳造過程における温度場および凝固シェルの弾塑性応力場のシミュレーション, 機論, **55**-514, A(1989), pp.1389-1393.
- [36] 佐成 弘毅, 井上 達雄, 双ロール形薄板連続鋳造過程のシミュレーション, 機論, **56**-524, A(1972), pp.990-996.
- [37] 巨 東英, 武村 伸介, 井上 達雄, 遠心鋳造における凝固と応力の連成解析, 材料, **40**-464, (1992), pp.751-757.
- [38] 巨 東英, 井上 達雄, 物質移動を考慮した連続鋳造過程の解析 (第2報, 変形と応力場の解析), 機論, **53**-492, A(1987), pp.1739-1742.
- [39] 福井 泰好, 山中 登, 若島 健司, 傾斜機能材料厚肉円筒の熱応力解析, 機論, **58**-546, A(1992), pp.257-262.
- [40] 荒居 善雄, 小林 英男, 田村充章, 傾斜機能材料の熱弾塑性応力解析と最適材料設計, 機論, **59**-559, A(1993), pp.849-855.
- [41] K. Tanaka, S. Kobayashi and Y. Sato, *Thermomechanics of Transformation Pseudoelasticity and Shape Memory Effect in Alloys*, Int. J. Plast., **2**, (1986), pp.59-72.
- [42] K. Tanaka, T. Hayashi, Y. Aida and H. Tobushi, *Thermomechanical Behavior of an Fe-Cr-Mn-Si Polycrystalline Shape Memory Alloy*, J. Intell. Mat. Sys. Struct., **4**-10, (1993), pp.1-6.
- [43] 琵琶 志朗, 山田 健一, 松本 英治, 柴田 俊忍, 形状記憶合金の熱・力学的構成式に基づくバイアス形アクチュエータの解析, 機論, **61**-591, A(1995), pp.2495-2500.
- [44] 鈴木 春義, 溶接工学, (1960), コロナ社.
- [45] 橋本 啓介, 溶接工学, (1966), 工学図書.
- [46] 渡辺 正紀, 峰久 節治, 溶接工学, (1968), 共立出版.
- [47] 石井 勇五郎, 溶接工学, (1973), 朝倉書店.

- [48] 荒田 吉明, 溶接工学, (1980), 朝倉書店.
- [49] D. Rosenthal, *Mathematical Theory of Heat Distribution During Welding and Cutting*, Weld. J., **20**-5, (1941), pp.220s-234s.
- [50] D. Rosenthal, *The Theory of Moving Sources of Heat and Its Application to Metal Treatment*, Trans. ASME, **68**-11, (1941), pp.849-866.
- [51] Y. Ueda and M.G. Yuan, *Prediction of Residual Stresses in Butt Welded Plates Using Inherent Strains*, Trans. ASME, J. Eng. Mat. Technol., **115**-10, (1989), pp.417-423.
- [52] G.W. Kurtz and L.J. Segerind, *Finite Element Analysis of Welded Structures*, Weld. J., **57**, (1978), pp.211s-216s.
- [53] V.J. Papazoglou and K. Masubuchi, *Numerical Analysis of Thermal Stresses during Welding including Phase Transformation Effects*, Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol., **104**-8, (1982), pp.198-203.
- [54] B.A.B. Andersson, *Thermal Stresses in a Submerged-Arc Welded Joint Considering Phase Transformations*, Trans. ASME, J. Eng. Mat. Technol., **100**, (1978), pp.356-362.
- [55] J.H. Argyris, J. Szimmat and K.J. Willam, *Computational Aspects of Welding Stress Analysis*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., **33**, (1982), pp.635-666.
- [56] 王 志剛, 井上 達雄, 溶融を考慮した粘塑性体の構成式とそれを用いた溶接過程の解析, 機論, **50**-459, A(1984), pp.1900-1908.
- [57] 王 志剛, 井上 達雄, 粘塑性体の構成式を用いた板の突合わせ溶接過程の解析, 機論, **51**-467, A(1985), pp.1858-1863.
- [58] E. Friedman, *Thermomechanical Analysis of the Welding Process using Finite Element Method*, Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol., **97**-3, (1975), pp.206-213.
- [59] E. Friedman and S.S. Glickstein, *An Investigation of the Thermal response of Stationary Gas Tungsten Arc Welds*, Weld. J. **55**-12, (1976), pp.206-213.

- [60] L. Karlsson, *Thermal Stresses in Welding*, Thermal Stresses, **1**, (1986), pp.300-389, Elsevier Science Publishers B. V.
- [61] M. Jonsson, L. Karlsson and L-E. Lindgren, *Simulation of Tack Welding Procedures in Butt Joint Welding of Plates*, Weld. J., **64**-10, (1985), pp.296s-301s.
- [62] M. Jonsson, L. Karlsson and L-E. Lindgren, *Deformation and Stresses in Butt-Welding of Large Plates with Special Reference to the Mechanical Material Properties*, Trans. ASME, J. Eng. Mat. Technol., **107**, (1985), pp.265-270.
- [63] R. Sandström and S.-T. Tu, *The Effect of Multiaxiality on the Evaluation of Weldment Strength reduction Factors in High-Temperature Creep*, Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol., **116**-2, 1994, pp.76-80.
- [64] E.F. Rybicki, D.W. Schmueser, J.J. Groom and H.W. Mishler, *A Finite-Element Model for Residual Stresses and Deflections in Girthbutt Welded Pipes*, Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol., **100**, (1978), pp.256-262.
- [65] E.F. Rybicki and R.B. Stonesifer, *Computation of residual Stresses Due to Multipass Welded Pipes*, Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol., **101**, (1979), pp.149-154.
- [66] E.F. Rybicki and P.A. McGuire, *A Computational Model for Improving Weld residual Stresses in Small Diameter Pipes by Induction Heating*, Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol., **103**, (1981), pp.294-299.
- [67] E.F. Rybicki, P.A. McGuire, E. Merrick and J. Wert, *The Effect of Pipe Thickness on Residual Stresses due to Girth Welds*, Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol., **104**, (1982), pp.204-209.
- [68] S. Vaidyanathan, A.F. Todaro and I. Finnie, *Residual Stresses Due to Circumferential Welds*, Trans. ASME, J. Eng. Matel. Technol., **95**-10, (1973), pp.233-237.
- [69] S. Vaidyanathan, H. Weiss and I. Finnie, *A Further Study of Residual Stresses in Circumferential Welds*, Trans. ASME, J. Eng. Matel. Technol., **95**-10, (1973), pp.238-242.

- [70] B.L. Josefson, *Residual Stresses and Their Redistribution During Annealing of a Girth-Butt Welded Thin-Walled Pipe*, Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol., **104**-8, (1982), pp.245-250.
- [71] B.L. Josefson, *Stress Redistribution During Annealing of a Multi-Pass Butt-Welded Pipe*, Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol., **105**-5, (1983), pp.165-170.
- [72] S. Nair, E. Pang and R.C. Dix, *Residual Stress Generation and Relaxation in Butt-Welded Pipes*, Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol., **104**-2, (1982), pp.42-46.
- [73] B. Andersson and L. Karlsson, *Thermal Stresses in Large Butt-Welded Plates*, J. Thermal Stresses, **4**, (1981), pp.491-500.
- [74] Z-B. Kuang and S.N. Atluri, *Temperature Field due to a Moving Heat Source: A Moving Mesh Finite Element Analysis*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **52**-6, (1985), pp.274-280.
- [75] I.C. Sheng and Y. Chen, *Modeling Welding by Surface Heating*, Trans. ASME, J. Eng. Mat. Technol., **114**-10, (1992), pp.439-449.
- [76] Y. Chen and I.C. Sheng, *Residual Stress in Weldment*, J. Thermal Stresses, **15**, (1992), pp.53-69.
- [77] Y. Chen and I.C. Sheng, *On Solid-Fluid Transition Zone in Welding Analysis*, Trans. ASME, J. Eng. Mat. Technol., **115**-1, (1993), pp.17-23.
- [78] M. Gu and J.A. Goldak, *Steady-State Formulation for Stress and Distortion of Welds*, Trans. ASME, J. Eng. Ind., **116**-11, 1994, pp.467-474.
- [79] P. Tekriwal and J. mazumder, *Finite Element Analysis of Three-Dimensional Transient Heat Transfer in GMA Welding*, Weld. J., **67**-7, (1988), PP.150S-156S.
- [80] P. Tekriwal and J. Mazumder, *Transient and Residual Thermal Strain-Stress Analysis of GMAW*, Trans. ASME, J. Eng. Mat. Techol., **113**-7, (1991), pp.336-343.

- [81] R.I. Karlsson and B.L. Josefson, *Three-Dimensional Finite Element Analysis of Temperature and Stresses in a Single-Pass Butt-Welded Pipe*, Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol., **112**-2, (1990), pp.76-84.
- [82] W.W. Wilkening and J.L. Snow, *Analysis of Welding induced Residual Stresses with ADINA System*, Comp. Struct., **47**, (1993), pp.767-786.
- [83] 望月 正人, 榎本 邦夫, 岡本 紀明, 斉藤 英世, 林 英策, 厚板を貫通する配管の溶接による残留応力の発生機構の検討, 溶接, **12**-4, (1994), pp.562-567.
- [84] 中村 満, 菊池 靖, 田頭 孝介, 堀江 皓, 炭素鋼溶接熱影響部の再熱過程での応力緩和挙動, 溶接, **11**-4, (1993), pp.520-525.
- [85] 村田 博隆, 加藤 昇, 田村 博, 溶接残留応力におよぼす相変態の影響 (第7報), 溶接学会全国大会講演概要, **51**, (1992), pp.278-279.
- [86] 村田 博隆, 田村 博, 加藤 昇, 白松 修, 溶接角変形におよぼす変態温度の影響-変態超塑性による応力緩和 (第4報), 溶接, **11**-4, (1993), pp.550-555.
- [87] 村田 博隆, 加藤 昇, 田村 博, 相変態が溶接残留応力におよぼす影響-変態超塑性による応力緩和 (第5報), 溶接, **11**-4, (1993), pp.545-549.
- [88] 村田 博隆, 田村 博, 加藤 昇, 飯山 孝志, 相変態が応力集中部の応力緩和特性におよぼす影響-変態超塑性による応力緩和 (第6報), 溶接, **11**-4, (1993), pp.550-555.
- [89] 渡辺 健彦, 柴田 信一, 後藤 弘匡, オーステナイトステンレス鋼溶接熱影響部の粒界挙動と溶接金属の成長, 溶接, **13**-2, (1995), pp.262-269.
- [90] 日向 輝彦, 安田 克彦, 春日 幸生, 恩澤 忠男, 移動 TIG アークによる溶込み形態と実用継手の溶接, 溶接, **12**-1, (1994), pp.58-63.
- [91] 石崎 敬三, 石井 幸三, 岡田 恒男, 横谷 慎一郎, He-TIG アーク溶接における陽極現象と溶込み, **12**-1, (1994), pp.39-43.
- [92] 石崎 敬三, 岡田 恒男, 横谷 慎一郎, TIG 陽極面の電磁力と溶融地の複対流, 溶接, **12**-2, (1994), pp.200-206.

- [93] 岡田 明, 中村 治方, GTA 溶接における陽極挙動と母材の溶融に及ぼす影響, 溶接, **12**-1, (1994), pp.94-100.
- [94] D.R. Atthey, *A Mathematical Model for Fluid Flow in a Weld Pool at High Current*, J. Fluid Mech., **98**-4, (1980), pp.787-801.
- [95] C.R. Heiple and J.R. Roper, *Effect of Selenium on GTAW Fusion Zone Geometry*, Weld. J., **60**-8, (1981), pp.143s-145s.
- [96] C.R. Heiple and J.R. Roper, *Mechanism for Minor Element Effect on GTA Fusion Zone Geometry*, Weld. J., **61**-4, (1982), pp.97s-102s.
- [97] C.R. Heiple and J.R. Roper, *Surface Active Element Effects on the Shape of GTA, Laser and Electron Beam welds*, Weld. J., **62**-3, (1983), pp.72s-77s.
- [98] C.R. Heiple and J.R. Roper, *Effect of SO₂ Shielding Gas Additions on GTA Weld Shape*, Weld. J., **64**-6, (1985), pp.159s-162s.
- [99] G.M. Oreper, T.W. Eager and J. Szekely, *Convection in Arc Weld Pools*, Weld. J., **52**-11, (1973), pp.307s-312s.
- [100] G.M. Oreper and J. Szekely, *Heat- and Fluid-Flow Phenomena in Weld Pools*, J. Fluid Mech., **147**-10, (1984), pp.53-79.
- [101] 横谷 真一郎, 岡田 恒雄, 松縄 朗, 軟鋼の静止アーク溶融部の溶込み, 溶接, **12**-2, (1994), pp.192-199.
- [102] K.C. Tsao and C.S. Wu, *Fluid Flow and Heat Transfer in GMA Weld Pools*, Weld. J., **67**-3, (1988), pp.70s-75s.
- [103] R.T.C. Choo and J. Szekely, *The Possible Role of Turbulence in GTA Weld Pool Behavior*, Weld. J., **73**-2, (1994), pp.25s-31s.
- [104] W.D. Bennon and F.P. Incropera, *A Continuum Model for Momentum, Heat and Species Transport in Binary Solid-Liquid Phase Change System - I. Model Formulation*, Int. J. Heat Transf., **30**-10, (1987), pp.2161-2170.

- [105] W.D. Bennon and F.P. Incropera, *A Continuum Model for Momentum, Heat and Species Transport in Binary Solid-Liquid Phase Change System - II. Application to Solidification in a Rectangular Cavity*, Int. J. Heat Transf., **30**-10, (1987)(pp.2171-2186.
- [106] S. Kou and D.K. Sun, *Fluid Flow and Weld Penetration in Stationary Arc Welds*, Metal. Trans., **16**-2, A(1986), pp.203-211.
- [107] S. Kou and Y.H. Wang, *Weld Pool Convection and Its Effect*, Weld. J., **66**-3, (1986), pp.63s-70s.
- [108] S. Kou and Y.H. Wang, *Three-Dimensional Convection in Laser Melted Pools*, Metal. Trans., **17**-12, A(1986), pp.2265-2270.
- [109] S. Kou and Y.H. Wang, *Computer Simulation of Convection in Moving Arc Weld Pools*, Metal. Trans., **17**-12, A(1986), pp.2271-2277.
- [110] T. Zacharia, A.H. Eraslan and D.K. Aidun, *Modeling of Autogeneous Welding*, Weld. J., **67**, (1988), pp.18s-27s.
- [111] T. Zacharia, A.H. Eraslan and D.K. Aidun, *Modeling of Autogeneous Welding*, Weld. J., **67**, (1988), pp.53s-62s.
- [112] T. Zacharia, A.H. Eraslan and D.K. Aidun, *Modeling of Non-Autogenous Welding*, Weld. J., **67**-1,(1988), pp.18s-27s.
- [113] T. Zacharia, A.H. Eraslan and D.K. Aidun, *Modeling of Autogenous Welding*, Weld. J., **67**-3, (1988), pp.53s-63s.
- [114] L.A. Bertram, *Flow Effect on the Solidification Environment in a GTA Spot Weld*, Trans. ASME, J. Eng. Mat. Technol., **115**-1, (1993), pp.24-29.
- [115] M.C. Tsai and S. Kou, *Electromagnetic-Force-Induced Convection in Weld Pools with a Free Surface*, Weld. J., **69**-6, (1990), pp.241s-246s.

- [116] J.-W. Kim and S.-J. Na, *A Study on Three-Dimensional Analysis of Heat and Fluid Flow in Gas Metal Arc Welding Using Boundary-Fitted Coordinates*, Trans. ASME, J. Eng. Ind., **116**-2, (1994), pp.78-85.
- [117] J.-W. Kim and S.-J. Na, *A Study on the Effect of Contact Tube-to-Workpiece Distance on Weld Pool Shape in Gas Metal Arc Welding*, Weld. J., **74**-5, (1995), pp.141s-152s.
- [118] 山口 昌哉, 野木 達夫, ステファン問題, (1977), pp.99-121, 産業図書.
- [119] T. Inoue and Z. Wang, *Viscoplastic Constitutive Relation incorporating Phase Transformation - Application to Welding*, Mat. Sci. Tech., **1**, (1985), pp.899-903.
- [120] 例えば 日本材料学会編, 固体力学の基礎, (1981), pp.37-50, 日刊工業新聞社.
- [121] 田中 喜久昭, 長岐 滋, 井上 達雄, 弾性力学と有限要素法, (1995), pp.69-72, 大河出版.
- [122] 松信 八十男, 変形と流れの力学, (1981), pp.86-97, 朝倉書店.
- [123] 棚橋 隆彦, 連続体力学, **2**, (1986), pp.1-52, 朝倉書店.
- [124] 例えば 齊藤 武, 大竹 一友, 三田地 紘史, 工業熱力学通論, (1987), pp.1-8, 日刊工業新聞社.
- [125] P. Grandsorff and I. Prigogine, *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*, (1971), Wiley-Interscience (松本 元, 竹山 協三訳, 構造・安定・ゆらぎ, (1977), みすず書房).
- [126] 井上 達雄, 弾性力学の基礎, (1984), pp.21-35, 日刊工業新聞社.
- [127] 今谷 勝次, 芳賀 祐和, 井上 達雄, 高温多軸応力下における SUS304 鋼の非弾性挙動に関する研究 (第2報, 非弾性構成式による解析と検討), 機論, **52**-473, A(1986), pp.58-66.
- [128] 中村 俊哉, 朝田 泰英, 有効応力の発展式を導入した統一形非弾性構成式, 機論, **58**-554, A(1993). pp.2005-2010.
- [129] 橋口 公一, 最新弾塑性学, (1990), 朝倉書店.

- [130] R.Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity*, (1950), Oxford (鷲津 久一郎, 山田 嘉昭, 工藤 英明訳, 塑性学, (1954), 培風館.).
- [131] S.R. Bodner and Y. Partom, *Constitutive Equations for Elastic-Viscoplastic Strain-Hardening Materials*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., (1975), pp.385-389.
- [132] M.A. Eisenberg and C.F. Yen, *A Theory of Multiaxial Anisotropic Viscoplasticity*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **48**, (1981), pp.276-284.
- [133] J.L. Chaboche and G. Rousselier, *On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations - Part I: Rules developed with Internal Variable Concept*, Trans. ASME, J. Pressure Vessel Technol., **105**, (1983), pp.153-158.
- [134] J.L. Chaboche and G. Rousselier, *On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations - Part II: Application of Internal Variable Concepts to the 316 Stainless Steel*, Trans. ASME, J. Pressure Vessel Technol., **105**, (1983), pp.159-164.
- [135] 鷲津 久一郎, 宮本 博, 山田 嘉昭, 山本 善之, 川井 忠彦編, 有限要素法ハンドブック, **2**, (1983), pp.398-411.
- [136] O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung, *A General Formulation for Coupled Thermal Flow of Metals using Finite Elements*, Int. J. Numer. Meth. Eng., **17**, (1981), pp.1497-1514.
- [137] P. Perzyna, *Fundamental Problems in Viscoplasticity*, Adv. Appl. Mech., **9**, 1966, pp.243-377.
- [138] 例えば 日本材料学会編, 固体力学の基礎, (1981), pp.219-256, 日刊工業新聞社.
- [139] 富田 佳宏, 数値弾塑性力学, (1990), pp.47-104, 養賢堂.
- [140] 橋口 隆吉, 鉄鋼の物性, **1**, (1970), 朝倉書店.
- [141] 日本機械学会編, 相変態と材料挙動の数値シミュレーション, (1991), pp.31-77, コロナ社.

- [142] 大和久 重雄, 赤須 英夫, 亜共析鋼の恒温オーステナイト化曲線, 金属, **25**, (1961), pp.515-519.
- [143] 大和久 重雄, 赤須 英夫, 過共析鋼の恒温オーステナイト化曲線, 金属, **26**, (1962), pp.518-522.
- [144] 長村 光造, 材料組織学, (1991), 朝倉書店.
- [145] 金属学会編, 金属データブック, (1974), 丸善.
- [146] M. Fujita and M. Suzuki, *The Effect of High Pressure on the Isothermal Transformation in High Purity Fe-C Alloys and Commercial Steel*, Trans. ISIJ, **14**, (1974), pp.44-53.
- [147] R.F. Mehl, *The Structure and Rate of Formation of Pearlite*, Trans. ASM, **29**, (1941), p.813.
- [148] M.M. Labib, A.A. Golestaneh, C. Handford and G. Bullock, *The Isothermal transformation of Lamellar Pearlite to Austenite*, JISI, **185**, (1957), pp.207-215.
- [149] A.A. Golestaneh, C. Handford and G. Bullock, *Isothermal Transformation of Spheroidized Pearlite to Austenite*, JISI, **188**, (1958), pp.237-241.
- [150] 赤須 英夫, 構造用鋼の恒温オーステナイト化曲線, 金属, **27**, (1963), pp.266-270.
- [151] 赤須 英夫, 炭素鋼の恒温オーステナイト化曲線におよぼす前処理組織の影響, 金属, **30**, (1966), pp.201-206.
- [152] 赤須 英夫, 普通炭素鋼の急速焼入れにおよぼす前処理としての冷間加工の影響, 金属, **30**, (1966), pp.460-463.
- [153] 川崎 一博, 高岡 憲久, 山崎 隆雄, 尾崎 良三, 短時間加熱による鋼のオーステナイト化, 熱処理, **20-6**, (1980), pp.281-288.

- [154] V.I. Zel'dovich and I.V. Khomskaya, *Influence of Heating Rate and Initial Structure on Austenite Formation in Low-carbon Alloys Fe-0.6% C*, Phys. Met. Metall., **65**-2, (1988), pp.144-153.
- [155] 矢川 元基, 宮崎 則幸, 有限要素法による熱応力・クリープ・熱伝導解析, (1985), pp.115-134, サイエンス社.
- [156] 長岡 金吾, 機械材料学, (1968), pp.148-228, 工学図書.
- [157] Th. Nitschke-Pagel, H. Wofahrt, *Residual Stress Distributions after Welding as a Consequence of the Combined Effect of Physical, Metallurgical and Mechanical Sources*, Mechanical Effect of Welding, (1991), pp.123-134, Springer-Verlag.
- [158] 加藤 正仁, 高坂 泰憲, 単相ステンレス鋼 SUS304 における $\alpha' \rightarrow \gamma$ 逆変態を伴う再結晶および高温変形挙動, 鉄と鋼, **80**-3, (1994), pp.249-253.
- [159] 富村 宏紀, 高木 節雄, 徳永 洋一, 準安定オーステナイト系ステンレス鋼における加工誘起マルテンサイトの逆変態機構, 鉄と鋼, **74**-8, (1988), pp.1649-1656.
- [160] K.B. Guy, E.P. Butler and D.R. West, *The Isothermal transformation of Lamellar Pearlite to Austenite*, Met. Sci., **17**-4, (1983), pp.167-175.
- [161] M. Watanabe and Y. Mukai, *Study on Stress Corrosion Cracking of Austenitic Stainless Steels*, Tech. Rep. Osaka Univ., **10**, (1960), pp.439-452.
- [162] M. Watanabe and A. Ando, *Embrittlement of Large Steel Casting due to Welding - Effect of Welding Conditions and Metallurgical Structure*, Tech. Rep. Osaka Univ., **17**, (1967), pp.63-79.
- [163] M. Watanabe and Y. Mukai, *Effect of Cold Working on Stress Corrosion Cracking of Austenitic Stainless Steels and Their Welded Joints*, Tech. Rep. Osaka Univ., **20**, (1970), pp.99-120.
- [164] 渡辺 正紀, 向井 義彦, ステンレス鋼の溶接, (1971), pp.60-93, 日刊工業新聞社.

- [165] M. Avrami, *Kinetics of Phase Change I - General Theory*, J. Chem. Phys., **7**, (1939).
- [166] 日本熱物性学会編, 熱物性ハンドブック, (1990), 養賢堂.
- [167] 松井 英之, 巨 東英, 井上 達雄, 超高温における SUS304 鋼の非弾性特性と統一構成式, 材料, **41**-466, (1992), pp.1153-1159.

関連発表論文

第2章

1. 溶融・凝固による移動境界問題の粘塑性構成式による固相-液相の連成解析 (第1報, 問題のモデル化と基礎式, 有限要素式), 佐久間 淳, 井上 達雄, 日本機械学会論文集, 第62巻, 第596号, A編, (1996-4), 掲載予定.
2. 溶融・凝固による移動境界問題の粘塑性構成式による固相-液相の連成解析 (第2報, 溶接過程のシミュレーションへの適用), 佐久間 淳, 井上 達雄, 日本機械学会論文集, 第62巻, 第596号, A編, (1996-4), 掲載予定.
3. *Analysis of Flow, Deformation and Stresses in Melting/Solidification Process of Welding by Viscoplastic Constitutive Equation*, A. Sakuma and T. Inoue, Proceedings of Plasticities '95, (1995-8), pp.721-724.

第3章

1. 溶融・凝固による移動境界問題の粘塑性構成式による固相-液相の連成解析 (第1報, 問題のモデル化と基礎式, 有限要素式), 佐久間 淳, 井上 達雄, 日本機械学会論文集, 第62巻, 第596号, A編, (1996-4), 掲載予定.
2. 溶融・凝固による移動境界問題の粘塑性構成式による固相-液相の連成解析 (第2報, 溶接過程のシミュレーションへの適用), 佐久間 淳, 井上 達雄, 日本機械学会論文集, 第62巻, 第596号, A編, (1996-4), 掲載予定.
3. *Analysis of Flow, Deformation and Stresses in Melting/Solidification Process of Welding by Viscoplastic Constitutive Equation*, A. Sakuma and T. Inoue, Proceedings of Plasticities '95, (1995-8), pp.721-724.

第4章

1. 加熱・冷却過程の拡散形変態のカイネティックスと溶接過程のシミュレーションへの適用, 佐久間 淳, 井上 達雄, 日本機械学会論文集, 第60巻, 第575号, A編, (1994-7), pp.1624-1631.
2. *Simulation of Elasto-Viscoplastic Stresses in Welding Process Coupled with Phase Transformation*, A. Sakuma and T. Inoue, Proceedings of the third World Congress on Computational Mechanics, (1994-8), pp.1924-1925.
3. *Metallo-Thermo-Mechanics in Welding Process*, T. Inoue and A. Sakuma, Proceedings of Thermal Stresses '95, (1995-6), pp.521-523.

第5章

1. 加熱・冷却過程の拡散形変態のカイネティックスと溶接過程のシミュレーションへの適用, 佐久間 淳, 井上 達雄, 日本機械学会論文集, 第60巻, 第575号, A編, (1994-7), pp.1624-1631.
2. *Simulation of Elasto-Viscoplastic Stresses in Welding Process Coupled with Phase Transformation*, A. Sakuma and T. Inoue, Proceedings of the third World Congress on Computational Mechanics, (1994-8), pp.1924-1925.
3. *Metallo-Thermo-Mechanics in Welding Process*, T. Inoue and A. Sakuma, Proceedings of Thermal Stresses '95, (1995-6), pp.521-523.

第6章

1. SUS304 鋼の溶接過程における熱影響部の組織変化と粘塑性応力のシミュレーション, 佐久間 淳, 井上 達雄, 日本機械学会論文集, 第61巻, 第583号, A編, (1995-3), pp.620-625.

第7章

1. 溶融・凝固による移動境界問題の粘塑性構成式による固相-液相の連成解析 (第1報, 問題のモデル化と基礎式, 有限要素式), 佐久間 淳, 井上 達雄, 日本機械学会論文集, 第62巻, 第596号, A編, (1996-4), 掲載予定.
2. 溶融・凝固による移動境界問題の粘塑性構成式による固相-液相の連成解析 (第2報, 溶接過程のシミュレーションへの適用), 佐久間 淳, 井上 達雄, 日本機械学会論文集, 第62巻, 第596号, A編, (1996-4), 掲載予定.
3. *Analysis of Flow, Deformation and Stresses in Melting/Solidification Process of Welding by Viscoplastic Constitutive Equation*, A. Sakuma and T. Inoue, Proceedings of Plasticities '95, (1995-8), pp.721-724.

第8章

1. 溶融・凝固による移動境界問題の粘塑性構成式による固相-液相の連成解析 (第1報, 問題のモデル化と基礎式, 有限要素式), 佐久間 淳, 井上 達雄, 日本機械学会論文集, 第62巻, 第596号, A編, (1996-4), 掲載予定.

謝 辞

本論文は、京都大学大学院工学研究科機械工学専攻博士後期課程における研究をまとめたものであって、この間に御指導を賜った京都大学教授 井上 達雄 先生には心からお礼申し上げますとともに、先生の諸現象に対する造詣の深さには大いに驚嘆させられたことをここに記し、敬意を表します。

また、北海道大学工学部および大学院工学研究科修士課程において、本研究の端緒となった残留応力論について、未熟な筆者に対して深厚なる御指導を賜った北海道大学教授 鶴飼 隆好 先生には、謹んで感謝の意を表します。

この論文をまとめるにあたっては、京都大学教授 大谷 隆一 先生ならびに京都大学教授 島 進 先生に御指導いただいたことに厚く御礼申し上げます。

さらに、京都大学助教授 松本 英治 先生には、予備検討の過程において連続体力学の観点から詳細な御検討、御指導をいただき感謝の言葉ありません。同時に、研究遂行に当たっての京都大学助教授 星出 敏彦 先生ならびに京都工芸繊維大学助教授 今谷 勝次 先生、京都大学助手 水野 衛 先生の御助言と激励には心から御礼申し上げます。

山口大学教授 瀧本 昭夫 先生を始めとする山口大学の皆様の心温まる励ましには、深く感謝の意を表します。

加えて、本論文に関する研究を遂行するにあたって、多くの場面で協力下さった京都大学固体力学研究室の学生、院生の方々、とくに数値解析に貢献していただいた 真下 晋一 君には、深甚なる謝意を表したいと思います。同様に、佐橋 真人 君、畠間 清子 さんには積極的に理論の検証、大森 隆弘 君、上原 拓也 君には種々の問題の議論、田中 宏史 君には数値解析への助力、廣田 貴俊 君、阿部 健一郎 君には実験に協力をしていただきました。また、数値解析の基礎となった学部、修士課程での解析プログラム作成に際して、北海道大学助手 小田 憲司 先生、北海道大学材料力学研究室 斎藤 憲一 君からいただいた助言は、本研究にも大変有用でした。これまでの研究活動において、以上の皆様の協力を得ることができたことを、大変に嬉しくまた誇りに思っております。

最後になりますが、本論文の完成に精神的な支えとなってくれた妻 博子 と、家庭環境から諦めていた大学および大学院への進学を認め、さらに援助をしていただいた母には、最大限の感謝の意を表したいと思います。